INSTITUZIONI

DI

MECCANICA

E

D'IDROMECCANICA

NAPOLI

DALLA TIPOGRAFIA DEL SEBETO

1843

PREFAZIONE.

L' *opera, che negli anni 1792 e 1793 fu quì in Napoli pubblicata dal Chiaris. Sig. D. Niccolò Fergola coll'epigrafe di* Prelezioni sui Principj Matematici della Filosofia Naturale del Cavalier Isacco Newton, *è stata sempre tenuta in alto pregio da distinti Geometri; dei quali non pochi se ne sono avvaluti per istituire la gioventù studiosa nella Meccanica e nell' Idromeccanica. Ma poichè essa fu destinata, come il titolo stesso lo dinota, a rendere agevole l' intelligenza delle verità, che nei Principii Matematici del Newton si trovano esposte; il Chiaris. Autore non vi potè omettere talune teoriche, che all' Astronomia Fisica piuttosto che alla Meccanica si appartengono, nè altro metodo dovè seguire, che quello adottato dal sublime genio del Newton nell' Opera sua. Or essendo stato premurato da parecchi miei Allievi a pubblicare brevi Instituzioni di Meccanica e d' Idromeccanica, non ho creduto di poter meglio soddisfare alla volgare intelligenza, ed al tempo, che ordinariamente si vuole*

destinare per apprendere siffatte scienze, che trascrivere la più parte delle verità esposte dal fu Chiaris. D. Niccolò Fergola nelle sue Prelezioni sui Principj Matematici del Newton, omettendo quanto all' Astronomia fisica si appartiene, dilucidando alcune dimostrazioni, modificandone coll' analisi alcune altre, che dall' Autore colla guida della Geometria furono esibite, ed aggiungendovi alquante verità ed esperienze, che sono utili a coloro, che la Meccanica e l' Idromeccanica apprendono come mezzo a poter intendere i libri delle costruzioni di Architettura; ai quali basterà di spiegare soltanto quei paragrafi, che non veggonsi preceduti dall' asterisco. Mi lusingo, che questo mio lavoro voglia essere gradito dal pubblico, da cui chiedo compatimento.

GEOMETRICHE PRENOZIONI

Postul. *Quando vorrà dinotarsi, che la ragione di* X *ad* Y *sia composta dalle altre di* A *a* B, *di* C *a* D, *di* E *ad* F, *ec. si adotterà la seguente compendiosa indicazione* X : Y :: (A : B) (C : D) (E : F) ec.

Prenozione. I. *Se in mezzo a due grandezze omogenee* A *e* B *vi si frappongano delle altre* M, N, P, *anche ad esse omogenee; sarà sempre la ragione di* A *a* B *composta dalle ragioni di* A *ad* M, *di* M *ad* N, *di* N *a* P, *e di* P *a* B.

Dim. Poichè l'esponente $\frac{A}{B}$ della ragione di A a B adegua il prodotto $\frac{AMNP}{MNPB}$ degli esponenti $\frac{A}{M}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{N}{P}$, e $\frac{P}{B}$ delle ragioni di A ad M, di M ad N, di N a P, e di P a B; dev'essere la prima ragione uguale a quella, che risulta componendo queste ultime. C. B. D.

Pren. II. *Se di due ragioni si scambiino gli antecedenti, ovvero i conseguenti; la ragione, che da esse si compone, rimane la stessa. Così, a cagion di esempio, la ragion composta da quelle di* M *ad* N, *e di* P *ad* R *è la stessa di quella, che componesi dalle altre di* M *ad* R, *e di* P *ad* N.

Dim. Poichè la ragione, che si compone dalle ragioni di M ad N e di P ad R, ha per esponente il prodotto di $\frac{M}{N}$ per $\frac{P}{R}$, e questo prodotto adegua quello, che si ottiene multiplicando $\frac{M}{R}$ per $\frac{P}{N}$; cioè moltiplicando l'esponente della ragione di M ad R per quello dell'altra di P ad N; perciò dev'essere la ragione, che si compone dalle ragioni di M ad N, e di P ad R, uguale a quella, che si ottiene componendo le ragioni di M ad R, e di P ad N, o, che è lo stesso, componendo quelle di

P ad N e di M ad R, che si ottengono iscambiando gli antecedenti delle prime due ragioni. C. B. D.

Pren. III. *La ragion composta da più ragioni semplici, di* A : B, *di* C : D, *di* E : F, *e di* G : H, *due delle quali, di* C : D *e di* G : H, *sieno tra loro inverse, è la stessa, che quella, che si compone dalle medesime minorate di quelle due.*

Dim. Essendo la ragione di C a D inversa dell' altra di G ad H, dev' essere $\frac{C}{D}=\frac{H}{G}$, e dividendo queste uguali frazioni per la seconda di esse, dovrà risultarne $\frac{CG}{DH}=1$.

Ma il fratto $\frac{CG}{DH}$ dinota il prodotto della quantità di ragione di C a D per la quantità di ragione di G ad H. Dunque essendo un tal prodotto uguale ad 1, dev' essere il prodotto delle quantità di ragioni di A a B, di C a D, di E ad F, e di G ad H uguale al prodotto delle quantità di ragioni di A a B e di E ad F. Il perchè dev' essere la ragion composta dalle ragioni di A a B, di C a D, di E ad F, e di G ad H uguale a quella, che si compone di A a B, e di E ad F. C. B. F.

Pren. IV. *Se le due ragioni di* $a : b$, *e di* $c : d$ *ne compongano l' altra di* M : N; *una di quelle componenti sarà direttamente come la ragion composta di* M : N, *ed inversamente come l' altra componente.*

Dim. Essendo M : N in ragion composta di $a : b$, e di $c : d$; dovrà essere $\frac{M}{N}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, e quindi $\frac{a}{b}=\frac{M}{N}\cdot\frac{d}{c}$. Dunque la quantità della ragione di $a : b$ pareggia il prodotto delle quantità delle ragioni di M : N, e di $d : c$. E perciò dee stare $a : b :: (M : N)\ (d : c)$. C. B. D.

Pren. V. *In ogni curva* APD (fig. 2.) *il triangolo* Ppn *formato da un di lei archetto* Pp, *e dagli elementi* pn, Pn *delle coordinate ortogonali* AM, MP *è sempre simile al triangolo* pm C *costituito dall' ordinata, dalla normale, e dalla sunnormale.*

Dim. Poichè potendosi considerare l' archetto Pp qual retticciuola coincidente coll' elemento della tangente P T della curva nel punto P; dovrà essere il triangolo pTm simile all' altro pPn, che ad esso è equiangolo. Ma per l' ottava del VI degli Elementi l' è il triangolo pTm

simile all' altro pmC. Dunque dev' essere eziandio il triangolo pPn simile al triangolo pmC. C. B. D.

DELLA CICLOIDE.

* *Def. I.* Se il circolo (fig. 21.) ABc, che tocchi in A la retta AD, compia su questa un perfetto rotolamento, ed in uno stesso piano; il punto A descriverà una curva, che *cicloide* semplicemente, o *cicloide volgare* si domanda. Il circolo ABc dicesi *circolo generatore* della cicloide, e la retta AD, che trovasi tra il punto A e quell' altro D, ove il circolo generatore tocchi la retta AD nello stesso punto A, dicesi *base della cicloide*.

* *Def. II.* La retta EF, che pel punto medio E della base AD della cicloide si elevi perpendicolare ad essa base, e si protrae insino ad incontrarne il perimetro della cicloide, dicesi *asse* di una tal curva, intorno al quale suol descriversi il cerchio generatore. Il punto F si dirà *vertice* della stessa curva, e tutte le di lei corde parallele ad AD si diranno *ordinate* nella cicloide, di cui le ascisse corrispondenti saranno le parti dell' asse EF, che esse ordinate ne troncano dall' asse verso il vertice F.

* *Cor. I.* E poichè la cicloide AFD è intieramente descritta qualora il punto A della circonferenza del cerchio ABc perviene nel punto D della retta AD; l' è chiaro, che la base della cicloide pareggia la circonferenza del cerchio generatore di essa.

* *Cor. II.* Dunque la semibase AE della cicloide pareggia la metà EbF della circonferenza del cerchio generatore.

* *Cor. III.* Concepiscasi, che mentre il punto A si trovi nel punto G del perimetro della cicloide, il cerchio generatore tocchi la retta AD nel punto H. Dovrà essere l' arco GH del cerchio generatore uguale a DH. Ma la semicirconferenza HGK pareggia la semibase DHE della cicloide. Dunque dev' essere l' arco GK uguale ad HE. Intanto pel punto G si ordini la GL all' asse FE della cicloide, che incontri la semicirconferenza EIF nel punto I. Dovrà essere l' arco GH uguale all' arco EI, e l' arco GK uguale all' altro IF. Sicchè congiunta la IE, dovrà risultare l' angolo IEF uguale all' altro GHK. Ma la EF è parallela ad HK. Dunque anche la IE dev' essere parallela a GH; e perciò la figura GHEI dev' essere un parallelogrammo, e la GI dee pareggiare HE, ovvero l' arco circolare IF.

* *Cor. IV.* Si ponga il raggio FO del cerchio generatore della cicloide uguale ad r, l' ascissa $FL=x$, e la semiordinata $LG=y$. Sarà $LI=\sqrt{(2rx-x^2)}$, e l' arco IF, o la IG, che pareggia un tale arco, ne sarà dinotata da Arc. sen $\sqrt{(2rx-x^2)}$. Ma la semiordinata y adegua LI+IG. Dunque dev' essere

$$y=\sqrt{(2rx-x^2)}+\text{Arc.sen}\sqrt{(2rx-x^2)},$$

ch' è l' equazione alla cicloide.

* Prein. VI. *Determinare la sunnormale e la normale della cicloide.*

Sol. Si facciano le medesime indicazioni del Cor. prec. Sarà

$$y=\sqrt{(2rx-x^2)}+\text{Arc.sen}\sqrt{(2rx-x^2)}$$

l' equazione della cicloide. Ma il differenziale di $\sqrt{(2rx-x^2)}$ pareggia $\frac{rdx-xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$, e quello di Arc. sen $\sqrt{(2rx-x^2)}$ adegua $\frac{r^2dx-rxdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}\sqrt{(r^2-2rx+x^2)}}$, cioè $\frac{rdx(r-x)}{(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}}$, o sia $\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$. Dunque dev' essere

$$dy=\frac{2rdx-xdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}=dx\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}.$$

Il perchè essendo la sunnormale di una curva qualunque espressa da $\frac{ydy}{dx}$, sarà tal sunnormale nella cicloide uguale a

$$\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}.\left(\sqrt{(2rx-x^2)}+\text{Arc.sen.}\sqrt{(2rx-x^2)}\right),$$

cioè a $2r-x+\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}\text{Arc.sen.}\sqrt{(2rx-x^2)}$.

In oltre, essendo $dy=dx\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}$, dev' essere

$$dy^2=\frac{2rdx^2-xdx^2}{x},\ dx^2+dy^2=\frac{2rdx^2}{x},\ e\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$$

$dx\sqrt{\left(\frac{2r}{x}\right)}$. Ma la normale di una curva qualunque

n'è dinotata da $\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Dunque la normale della cicloide dev'essere uguale a

$$\sqrt{\left(\frac{2r}{x}\right)}.\left(\sqrt{(2rx-x^2)}+\text{Arc. sen. }\sqrt{(2rx-x^2)}\right),$$

cioè a $\sqrt{(4r^2-2rx)}+\sqrt{\left(\frac{2r}{x}\right)}\text{Arc. sen. }\sqrt{(2rx-x^2)}$.

C. B. F.

* *Cor.* Dunque nella cicloide la normale sta alla sunnormale corrispondente nella ragione di

$$\sqrt{\left(\frac{2r}{x}\right)} : \sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}, \text{ cioè di } \sqrt{2r} : \sqrt{2r-x}.$$

* Pren. VII. *Determinare il raggio d'osculo della cicloide.*

Sol. Si facciano le medesime precedenti indicazioni. Dovrà essere (Pren. prec.)

$$dy=dx\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}.$$

E quindi si ottiene

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2r-x}{x},\quad 1+\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{2r}{x}, \text{ ed} \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2r\sqrt{2r}}{x\sqrt{x}}\ldots(1).$$

In oltre essendo $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}=\frac{(2r-x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$, dev'essere pure

$$-d.\frac{dy}{dx}=\frac{-x^{\frac{1}{2}}.-\frac{1}{2}dx(2r-x)^{-\frac{1}{2}}+(2r-x)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx}{x},$$

o sia, multiplicando il numeratore e 'l denominatore del secondo fratto per $x^{\frac{1}{2}}(2r-x)^{\frac{1}{2}}$,

$$-d.\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}xdx+rdx-\frac{1}{2}xdx}{x\sqrt{x}\sqrt{2r-x}}=\frac{rdx}{x\sqrt{x}\sqrt{2r-x}}\ldots(2).$$

Ma il raggio d'osculo R di una qualunque curva pareggia l'espressione

$$\frac{dx\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-d.\frac{dy}{dx}}.$$

Dunque se il secondo membro dell'equazione (1) si multiplichi per dx, e 'l prodotto si divida pel secondo membro dell'equazione (2), ne dovrà risultare il raggio d'osculo della cicloide uguale a $2\sqrt{(4r^2-2rx)}$. . C. B. F.

* *Cor. I.* Si ponga $x=0$ nel valore del raggio osculatore della cicloide. Si troverà tal raggio nel vertice della cicloide uguale a $2\sqrt{4r^2}$, cioè a $4r$. Dunque *il raggio d'osculo nel vertice della cicloide è duplo del diametro del cerchio generatore di una tal curva.*

* *Cor. II.* Il perchè se l'asse FE della cicloide si prolunghi verso N insino a che sia EN uguale ad EF; il punto N dovrà essere un punto dell'evoluta della cicloide.

* *Cor. III.* Se nell'espressione $2\sqrt{(4r^2-2rx)}$ si ponga $2r$ per x, si avrà il raggio osculatore nel punto A, o nell'altro D della cicloide. Ma ponendo $2r$ per x in quell'espressione, essa riducesi uguale a zero. Dunque *è nullo il raggio d'osculo della cicloide in ciascuno dei punti estremi del suo perimetro.*

* *Cor. IV.* Essendo $KH=2r$, $HP=EL=2r-x$; sarà il rettangolo di KH in HP uguale a $2r(2r-x)$, cioè a $4r^2-2rx$. Ma quel rettangolo pareggia il quadrato di HG. Dunque dev' essere $HG=\sqrt{(4r^2-2rx)}$. Vale a dire che il *raggio d'osculo nel punto* G *della cicloide è doppio della corda* HG.

* Pren. VIII. *Determinare l' evoluta della cicloide.*

Sol. Sia (fig. 21) AFD la proposta cicloide, di cui l'asse FE si prolunghi insino al punto N, tal che sia EN uguale ad FE. Di poi dalle due NE, EA si compia il rettangolo NMAE. Saranno (Cor. II, e III Pren. prec.) N ed A due punti del perimetro dell'addimandata evoluta. Intanto sia u un punto del perimetro della cicloide AFD, cui corrispondano l'ascissa $FL=x$, la semiordinata $uL=y$, la normale uR, la sunnormale RL, e 'l raggio d'osculo uQ. Or se per lo punto Q si distenda la Qz parallela ad RL, e la TQS parallela ad AE, ne dovrà risultare il triangolo uRL simile all'altro uQz.

E quindi dee stare $uR : RL :: uQ : Qz$. Ma la ragione di uR ad RL pareggia quella (Cor. Pren. VI.) di $\sqrt{2r}$: $\sqrt{2r-x}$, ed è poi (Pren. prec.) $uQ = 2\sqrt{(4r^2-2rx)}$. Dunque dee stare

$$\sqrt{2r} : \sqrt{2r-x} :: 2\sqrt{4r^2-2rx} : Qz.$$

Il perchè dev' essere $Qz = 2(2r-x) = 4r-2x$. E quindi si ha $AT = Qx = Qz - LE = 4r-2x-2r+x = 2r-x$, $uz^2 = uQ^2 - Qz^2 = 16r^2 - 8rx - 16r^2 + 16rx - 4x^2 = 8rx - 4x^2 = 4(2rx-x^2)$, ed $uz = 2\sqrt{(2rx-x^2)}$

Ma l' è tutta $uL = \sqrt{(2rx-x^2)} + \text{Arc.sen}\sqrt{(2rx-x^2)}$. Dunque dev' essere $Lz = QS = uL - uz = -\sqrt{(2rx-x^2)} + \text{Arc.sen}\sqrt{(2rx-x^2)}$, e $QT = ST - SQ = AE + \sqrt{(2rx-x^2)} - \text{Arc.sen}\sqrt{(2rx-x^2)}$. Ma per esserne AE uguale alla semicirconferenza del cerchio generatore, AE—Arc. sen $\sqrt{(2rx-x^2)}$ pareggia il supplemento dell' arco del cerchio generatore, che tien per seno $\sqrt{(2rx-x^2)}$. Dunque nella curva AQN all' ascissa $AT = 2r-x$ vi corrisponde la semiordinata QT uguale a $\sqrt{(2rx-x^2)}$ aggiuntovi il supplemento dell'arco del cerchio generatore, che tien per seno $\sqrt{(2rx-x^2)}$. Ma nella semicicloide FcA prendendo l' ascissa uguale a $2r-x$, la semiordinata pareggia pure $\sqrt{(2rx-x^2)}$ aggiuntovi il supplemento dell' arco del cerchio generatore, che tien per seno $\sqrt{(2rx-x^2)}$. Dunque la semicicloide AcF è simile ed uguale alla sua evoluta AQN. C. B. F.

* *Cor. I.* Essendo $EL = 2r-x$, $Qz = 2(2r-x)$ dupla di xz, e 'l raggio d' osculo della cicloide nel punto u duplo della corda GH, o della vu, che corrisponde al punto u nel circolo generatore; l' è manifesto, che la vu debba coincidere col raggio d' osculo nel punto u. Il perchè la corda ua dell' arco supplementale dev' essere tangente della cicloide nel punto u.

* *Cor. II.* In oltre per esserne uv parallela a bE, l' è pure ua parallela a bF. Dunque se pel punto u si distenda la uC parallela ad FE, e da un qualunque punto a della ua si elevi a questa la perpendicolare aC, ne dovrà risultare il triangolo auC simile all' altro bFE.

* *Cor. III.* Intorno alla retta AM si descriva il cerchio MeA, che interseghi la QT nel punto e, e si congiunga la eA. Essendo AM uguale ad EF, ed AT uguale ad EL, sarà pure Ae uguale ad Eb. Ma Eb pareggia Qv, ch' è tangente della cicloide NQA nel punto Q, e con ciò parallela ad Ae (Cor. Pren. prec.). Dun-

que dev' essere $Q\nu$ la corda del cerchio generatore $dQ\nu$ della cicloide AQN. Onde essendo Qu dupla di $Q\nu$, e Qu uguale all' arco cicloidale QA; dev' essere pure l' arco cicloidale QA duplo della corda $Q\nu$, che gli corrisponde nel circolo generatore $dQ\nu$.

DELLA SPIRA CILINDRICA.

Def. III. La retta (fig. 35.) AB, che insistendo perpendicolare all'altra QA muovesi equabilmente lungo questa retta, e nello stesso tempo ne compie una rivoluzione circolare ed uniforme intorno al punto A, dee descrivere col suo estremo B una linea a doppia curvatura BRFD, che suol dirsi *spira cilindrica*, o *linea elica*. Il cerchio BOE, che si descriverebbe dalla BA, se non avesse moto progressivo, dicesi *base della spira*, di cui l' *asse* n' è la QA, e BD *l' altezza*. L' angolo formato dalla linea elica colla circonferenza di un cerchio, che è parallelo alla base della spira, dicesi *acutezza della spira*.

Prem. IX. *La lunghezza della spira sta alla circonferenza della di lei base, come il raggio al coseno dell' acutezza di essa spira, cioè al coseno dell' angolo* RBO. *La lunghezza della spira è alla di lei altezza come il raggio al seno dello stesso angolo* RBO. *E finalmente l' altezza della spira sta alla circonferenza della di lei base, come il seno al coseno dell' angolo* RBO.

Dim. L' altezza BD della spira si concepisca divisa in particelle picciolissime, e per gli estremi di queste s' intendano distesi altrettanti piani paralleli alla base BOE. Saranno altrettanti cerchi le intersezioni di quei piani colla superficie del cilindro su cui trovasi descritta la spira, e le inclinazioni della spira colle circonferenze di quei cerchi saranno uguali tra loro, e ciascuna quanto l' acutezza RBO della spira medesima. Onde se per l' estremo di uno di quegli archi di spira, che sono tra due piani paralleli, si abbassi la perpendicolare sul piano sottoposto, ne dovrà risultare un triangolo simile ad RBO, che potrà considerarsi come rettilineo, e la somma di tutti gli archetti corrispondenti a BO sarà quanto la intiera circonferenza del cerchio BOE. Il perchè essendo il raggio al coseno dell' acutezza RBO della spira come RB a BO; sarà pure la somma di tutti gli archi BR di un gi-

ro della spira alla somma di tutti gli archi BO, come il raggio al coseno dell'angolo RBO.

In oltre, essendo la somma di tutte le perpendicolari RO quanto l'altezza BD della spira, e BR ad RO come il raggio al seno dell'angolo RBO; sarà pure la somma di tutti gli archi BR, che formano un intiero giro della spira, alla somma di tutte le RO, o sia a BD come BR ad RO, ovvero come il raggio al seno dell'angolo RBO acutezza della spira.

Finalmente da ciò che si è detto si rileva, che debba stare BD alla circonferenza del cerchio BEO, come il seno al coseno dell'angolo RBO acutezza della spira. C. B. D.

Cor. I. Se dal punto B, ove la spira incontri la circonferenza della sua base, si prenda un qualunque arco circolare BY, e per Y si distenda la YZ parallela ad AQ, che seghi la spira in Z; saran pure le tre linee BZ, ZY, YB, come *il raggio, il seno dell' acutezza della spira, e'l di lei coseno.*

Cor. II. E se pongasi $BY = x$, e l'angolo $ZBY = \varphi$; sarà $YZ = x$ tang. φ, e $BZ = x$ sec. φ. Imperciocchè le tre linee BY, YZ, ZB son proporzionali alli tre lati BO, OR, BR del triangolo ROB rettangolo in O, che son proporzionali al raggio, alla tangente dell' angolo RBO, ed alla secante di esso.

* **Prem. X.** *Data l' inclinazione della base di una spira ad un piano orizzontale; calcolarne la distanza di ciascun punto di essa dallo stesso piano.*

Sol. Per l'asse del cilindro (fig. 81.) AQDRC, sulla cui superficie trovasi descritta la spira, si distenda un piano verticale, che dee intersegare la superficie di quel cilindro nel rettangolo AQDC: e sieno CD, CB le comuni sezioni di questo piano colla base della spira, e con un piano orizzontale sottopostole. Dal punto A si tiri AB perpendicolare alla BC: e preso un qualunque punto M nella periferia della detta base, si tirino per esso l' ordinata MR nel cerchio CMDR, e'l lato MO nel cilindro AQDRC, incontrando in O il primo giro della spira: indi per O ed N si distendano le due OT, NP parallele alla stessa AB, ed MT parallela a CB. Sarà manifesto doversi tra se incontrare le rette MT, OT, costituendone il triangolo MOT equiangolo, e quindi simile all'altro ABC.

I. Ciò posto, i due angoli NCP, BCA sono uguali ad

un retto, per essere retto l'angolo ACD, ch'è in mezzo ad essi: e sono eziandio uguali ad un retto gli angoli acuti BAC, BCA del triangolo ABC rettangolo in B. Dunque saranno gli angoli NCP, BCA uguali agli altri due BAC, BCA: onde toltovi il comune angolo BCA, dovrà restarvi l'angolo NCP uguale all'altro BAC. E quindi il triangolo CPN rettangolo in P sarà simile al triangolo ABC rettangolo in B, o al di lui equiangolo OTM.

II. E perchè la retta MR sta nel circolo CMDR, ed è perpendicolare alla CD comune sezione di esso piano, e del rettangolo AQDC; sarà la stessa MR perpendicolare al piano verticale AQDC: onde convien, che ella vi giaccia parallela all'orizzonte. E quindi ogni perpendicolare calata da ciascun punto della MR sul piano orizzontale disteso per la BY sarà uguale ad NP.

III. In oltre il raggio CG della base di questa spira sia uguale ad 1: e pongasi l'arco $RD = s$, e 'l suo coseno $GN = x$; sarà la retta $CN = 1 + x$. Di più si dinotino rispettivamente con p e q il seno e 'l coseno dell'angolo MDO acutezza della spira: e sieno m ed n il seno e'l coseno dell'angolo NCP, ch'è l'inclinazione del circolo CMDR all'orizzonte.

IV. Finalmente si ponga il seno massimo eguale ad 1: ed essendo per la natura di questa spira (Pren. prec.) $DM : MO :: q : p$, ed $MO : OT :: 1 : n$; sarà per composizione di ragioni $DM : OT :: q : pn$. E quindi essendo $DM = s$, sarà $OT = pns : q$. Ma nel triangolo NCP rettangolo in P sta NC ad NP come il raggio al seno dell'angolo NCP: dunque in simboli analitici dovrà stare $1 + x : NP :: 1 : m$, e con ciò dev' essere $NP = m(1 + x)$: e finalmente la retta OI, ch'è uguale ad OT+TI, sarà uguale ad OT+NP, cioè, come si è rilevato, a $\frac{pns}{q} + m(1 + x)$. C. B. F.

INSTITUZIONI

DI

MECCANICA

CAP. I.

NOZIONI PRELIMINARI.

§. 1. *Def. I.* Ogni sostanza, la cui esistenza ci si rende manifesta per mezzo di uno o più dei nostri sensi, dicesi *corpo*.

§. 2. *Scol.* Tutti i corpi si trovano dotati di talune qualità, che essendo sempre le medesime in qualunque luogo, in qualunque tempo, ed in qualsivoglia circostanza, si dicono *proprietà generali*. Le principali di queste sono *l' estensione*, *l' impenetrabilità o solidità*, *la figurabilità*, *la porosità*, *la mobilità*, *e l' inerzia*. Intanto in questo Capo vengono soltanto esibite le definizioni delle prime cinque di tali proprietà, e nel Cap. IV verrà esposta la definizione dell' inerzia.

§. 3. *Def. II.* L' *estensione* è quella proprietà, che hanno i corpi di essere lunghi, larghi, e profondi.

§. 4. *Def. III.* L' *impenetrabilità* o la *solidità* è quella proprietà, che possiede ciascun corpo di non poter essere compenetrato da altro corpo, o sia di non poter fare occupare nel

medesimo tempo ad altro corpo il luogo, che esso occupa.

§. 5. *Def. IV.* La *figurabilità* è quella proprietà, che hanno i corpi di essere ciascuno terminato da superficie.

§. 6. *Def. V.* Quella proprietà dei corpi di avere tra le loro parti solide alcuni interstizii privi della propria sostanza dicesi *porosità*, e questi interstizii si dicono *pori*. Tali sono le cellule, che veggonsi in una spugna, quei piccioli fori, che con un microscopio veggonsi in una sottile lamina di legno, ec.

§. 7. *Def. VI.* La quantità di materia, che si contiene in un corpo, dicesi *massa* di esso, e lo spazio, che esso corpo occupa, chiamasi volume dello stesso corpo.

§. 8. *Def. VII.* La *densità* di un corpo è la quantità di materia, che esso contiene sotto un dato volume.

§. 9. *Cor. I.* Dunque se due corpi abbiano uguali volumi e disuguali masse, sarà maggiore le densità di quel corpo, di cui la massa è maggiore, e viceversa. In generale, se due corpi abbiano uguali volumi e disuguali masse, che si dinotino con M ed m; le densità di essi D e d saranno tra se nella ragione di M ad m.

§. 10. *Cor. II.* Se due corpi abbiano uguali densità, e disuguali volumi, che si dicano V e v; le masse di essi M, ed m saranno tra se nella ragione dei volumi, cioè dovrà stare $M : m :: V : v$.

§. 11. *Cor. III.* Sieno M ed m le masse di due corpi, le cui densità si dinotino con D e d rispettivamente, e con V e v i loro volumi, e sia M' la massa di un altro corpo, che abbia

la densità D e 'l volume v, dovrà stare (§. 10.) $M : M^1 :: V : v$, ed (§. 9.) $M^1 : m :: D : d$. Dunque componendo le prime e le seconde ragioni delle precedenti analogie, si avrà $M : m :: (V : v)(D : d)$. Vale a dire, che *le masse di due corpi sono nella ragion composta dei volumi di essi corpi e delle loro densità.*

§. 12. *Cor. IV.* Il perchè se pongasi $m = 1$, $v = 1$, e $d = 1$, cioè se con m, v, e d si dinotino l' unità di massa, l' unità di volume, e quella della densità; dovrà stare $M : 1 :: VD : 1$. E quindi dev' essere $M = VD$.

§. 13. *Cor. V.* Dunque 1° *la massa di un corpo pareggia il volume di esso multiplicato per la sua densità*; 2° *il volume di un corpo adegua il quoziente della massa di esso per la sua densità*; 3° *e la densità di un corpo pareggia il quoto della massa di esso pel suo volume.*

§. 14. *Def. VIII.* Un corpo dicesi in *quiete*, se ciascuna particella di esso occupi sempre lo stesso luogo nello spazio, ed in ogni altro caso il corpo si dirà in *movimento.*

§. 15. *Def. IX.* La *mobilità* è quella proprietà, che hanno i corpi di poter essere posti in moto.

§. 16. *Def. X.* La scienza, che ha per soggetto il moto e la quiete dei corpi solidi, e le forze, che in uno di tali stati li mantengono, chiamasi *Meccanica.*

§. 17. *Def. XI.* Quella parte della Meccanica, che ha per soggetto il moto dei corpi solidi, e le forze, che gl' investono, dicesi *Dinamica.*

§. 18. *Def. XII.* Quella parte della Meccanica, che ha per soggetto lo stato di quiete dei

corpi solidi, e le forze, che in tale stato gli costituiscono, dicesi *Statica*.

§. 19. *Def. XIII.* Il movimento di un corpo dirassi *rettilineo*, o *curvilineo*, secondo che esso muovendosi ne percorra una linea retta, o pure una curva qualunque: e quel movimento si dirà *rotatorio o di rotazione*, se una retta distesa entro al corpo mantengasi immobile, ed esso corpo si aggiri intorno a tal retta, la quale *asse di rotazione* sarà chiamata.

§. 20. *Def. XIV.* Il movimento rettilineo o curvilineo di un corpo dicesi *uniforme*, ovvero *equabile*, se esso corpo in tempi uguali ne percorra parti uguali del suo sentiere, qualunque sieno queste, ed in ogni altro caso il movimento del corpo si dirà *difforme*, ovvero *variabile*.

§. 21. *Def. XV.* Il movimento di rotazione di un corpo dicesi *uniforme*, ovvero *equabile*, se ciascuna particella di esso percorra spazii uguali in tempi uguali intorno all' asse di rotazione: e tal movimento si dirà *difforme*, ovvero *variabile*, se ciascuna particella del corpo percorra spazii disuguali in tempi uguali, o al contrario.

§. 22. *Cor. I.* Dunque un corpo, che si muova equabilmente, dovrà impiegarvi più tempo a percorrere un qualche spazio, che un altro minore di esso.

§. 23. *Cor. II.* E lo stesso corpo percorrendone un dato spazio in un dato tempo, dovrà impiegarvi il doppio tempo nel condursi pel doppio spazio, il triplo pel triplo, ec.

§. 24. *Cor. III.* E quindi se un corpo si muova equabilmente, e nell' elemento t di tempo ne percorra lo spaziotto s; a percorrere lo

spazio *ms* dovrà impiegarvi il tempo *mt*, ed a percorrere lo spazio *ns* dovrà impiegarvi il tempo *nt*, ove *m* ed *n* ne dinotano due numeri intieri o fratti. Ma sta $ms : ns :: mt : nt$. Dunque *se un corpo si muova equabilmente ; gli spazii commensurabili da esso descritti debbono essere nella ragione dei tempi impiegati a descriverli.*

§. 25. *Def. XVI.* Quella determinazione, che sorge in un corpo qualora n' è animato a muoversi, e per la quale ne percorre un dato spazio in un dato tempo, chiamasi *velocità* del corpo.

§. 26. *Post. I.* Le velocità di più corpi, che camminano equabilmente, sono nella ragione degli spazii, che essi descrivono in tempi uguali.

§. 27. *Scol.* Dai Meccanici si suol prendere per unità di tempo il minuto secondo, cioè la 3600ma parte di un' ora, e per unità di velocità quella velocità, colla quale un corpo in un minuto secondo percorre lo spazio, che si è assunto uguale ad 1. Onde essendo le velocità di due corpi, che si muovono equabilmente, come gli spazii da essi corpi descritti in tempi uguali ; la velocità di un corpo suol esserne dinotata dallo spazio equabilmente percorso dal corpo in un minuto secondo.

C A P. II.

DEL MOTO EQUABILE.

PROP. I. TEOR.

§. 28. *Se un corpo equabilmente si muova* (*fig.* 1.) *pel sentiere* ABD ; *gli spazii* AB , BD *da esso descritti saranno come i tempi impiegati a descriverli.*

Dim. Quì può verificarsi , che gli spazii AB, BD sieno commensurabili, o che essi sieno incommensurabili. La dimostrazione del Caso 1° si ha nel §. 24 , e quella del 2° Caso dovrà ordirsi nel seguente modo.

Sieno PS ed SR i tempi , in che dal corpo A ne sieno rispettivamente descritti gli spazii AB, BD con moto equabile , e se è possibile la ragione di AB : BD non sia uguale all' altra di PS: SR. Dovrà essere la ragione di PS : SR maggiore o minore di quella di AB : BD. Sia primieramente maggiore , e si faccia PS : SR :: AB : BT. Sarà pure AB a BT in maggior ragione (13. El. V.) di AB a BD : e quindi BT minore di BD (10. El. V.). Intanto si prenda un' aliquota di AB , che sia minore di TD , ed essa si tolga quante volte si può dalla BD. Dovrà restarvi finalmente una retta CD minore di TD, e BC commensurabile ad AB. Onde se facciasi AB : BC :: PS : SQ ; sarà SQ maggiore di SR , siccome l' è BC maggiore di BT. Il perchè essendo gli spazii AB , BC commensurabili , e dinotando PS il tempo per AB , dovrà la SQ dinotarne quello per BC. Ma per supposizione la SR ne dinota il tempo per BD. Dunque il

corpo A impiegherà il tempo SQ a percorrere lo spazio BC, e 'l tempo SR minore di SQ a percorrere lo spazio BD maggiore di BC; il che ripugna.

Che se poi la ragione di AB a BD suppongasi maggiore di quella di PS ad SR; sarà invertendo BD a BA in minor ragione di SR ad SP; e quindi l' assurdo rilevato nel Caso 1° ricaderà su questo secondo. Dunque gli spazii percorsi da un corpo, che equabilmente si muove, sono sempre come i tempi impiegati a descriverli. C. B. D.

§ 29. *Cor. I.* Dunque se S ed *s* ne dinotino gli spazii equabilmente descritti da un corpo nei tempi T e *t* rispettivamente; dovrà stare $S : s :: T : t$.

§. 30. *Cor. II. E se due o più corpi si muovano equabilmente con uguali velocità; gli spazii da essi descritti debbono essere nella ragione dei tempi impiegati a descriverli.*

PROP. II. TEOR.

§. 31. *Se due corpi* A *e* B *equabilmente si muovano con velocità disuguali; gli spazii, che essi descrivono in due differenti tempi, saranno tra se in ragion composta dalle ragioni dei tempi e delle velocità.*

Dim. Sieno V e *v* le velocità, colle quali si muovono i corpi A e B, e T e *t* i tempi, nei quali si muovono, e si concepisca un altro corpo C, che equabilmente si muova colla velocità V del primo di quei due corpi, e nel tempo *t* del secondo. Sarà lo spazio S descritto dal corpo A all' altro S', che C ne percorre,

come T : *t* (§. 30.). Ma lo spazio S' descritto dal corpo C sta allo spazio *s* descritto dal corpo B, come la velocità V all' altra *v* (§. 26.). Dunque sarà lo spazio S percorso dal corpo A all' altro *s*, che da B si percorre, in ragion composta del tempo T all' altro *t*, e della velocità V all' altra *v*; cioè S : *s* :: TV : *tv*. C.B.D.

§. 32. *Cor. I.* Essendo S : *s*::TV : *tv*, dovrà essere S*tv*=*s*TV, e con ciò dovrà stare T: *t* :: S*v* : *s*V, e V: *v* :: S*t* : *s*T, cioè T : *t* ::(S : *s*) (*v* : V), e V : *v*:: (S : *s*) (*t* : T). Dunque *se due corpi si muovano equabilmente; i tempi, nei quali durano i loro movimenti, debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazii corsi, e dell' inversa delle velocità. E le velocità debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazii percorsi, e dell' inversa de' tempi.*

§. 33. *Cor. II.* Si ponga *s*=1, *t*=1, e *v*=1, cioè con *s*, *t*, e *v* si dinotino rispettivamente le unità di spazio, di tempo, e di velocità. Dovrà stare (§. 31.) S : 1 :: TV : 1. E quindi dev' essere

S=TV.

Vale a dire, *che se un corpo si muova equabilmente*, 1.° *lo spazio da esso descritto in un dato tempo dee pareggiare il prodotto del tempo per la velocità*; 2.° *il tempo dev' essere uguale allo spazio diviso per la velocità*; 3.° *e la velocità dee pareggiare lo spazio diviso pel tempo.*

C A P. III.

DEI MOTI VARIABILI, ED IN PARTICOLARE DEI MOTI UNIFORMEMENTE ACCELERATO, ED UNIFORMEMENTE RITARDATO.

§. 34. *Def. XVII.* Il moto variabile di un corpo (§. 20.) dicesi *accelerato* o *ritardato*, secondo che la velocità di esso corpo vada continuamente crescendo o decrescendo: ed un tal moto si dirà *uniformemente accelerato*, o *uniformemente ritardato*, se in tempi uguali la velocità del corpo cresca o pur diminuisca di quantità uguali.

§. 35. *Scol.* Quantunque nemmen di leggieri sieno state esaminate le cagioni e le leggi, onde nei moti variabili la velocità del mobile continuamente si accresca o si scemi; pure dovrà prendersi come postulato, che in tali moti l'acquisto di velocità, o la perdita, che ne fa il mobile alla fine di un tempo finito, non debba essere che di una magnitudine ancor finita. Dunque (fig. 2) se le parti AM, AN, AB, ec. della retta AMX indefinita verso X dinotino i tempi da che si è fatto muovere il corpo, e le perpendicolari MP, NQ, BD, ec. elevate sopra di essa dai punti M, N, B, ec. rappresentino le velocità dello stesso corpo alla fine dei mentovati tempi; *la linea che passa pei punti* P, Q, D, ec. *o sarà una retta inclinata alla* BA, *o pure una curva di continua curvatura.*

§. 36. *Def. XVIII.* La figura ABD, le cui ascisse AM, AN, ec. dinotano i tempi, da che un corpo si è cominciato a muovere, e le cor-

rispondenti ordinate MP, NQ, ec. rappresentano le velocità, ond' esso n' è affetto alla fine di quei tempi, suol chiamarsi *piano delle velocità del mobile.*

* §. 37. *Def. XIX.* La figura ABD, le cui ascisse AM, AN, ec. dinotano gli spazii percorsi dal mobile dal principio del moto, e le corrispondenti ordinate MP, NQ, ec. rappresentano le velocità, ond' esso n' è affetto alla fine di quei spazii, chiamasi *scala della velocità del mobile.*

PROP. III. TEOR.

§. 38. *Comunque si muova un corpo, può sempre concepirsi, che il suo moto sia equabile in un tempo infinitesimo, o che esso percorra equabilmente uno spazietto picciolissimo.*

Dim. Concepiscasi, che comunque muovendosi un corpo abbia descritto lo spazio s nel tempo t, e sia v la velocità di esso nella fine del tempo t. Egli è chiaro, che, decorso il tempo $t+dt$ dal principio del movimento, lo stesso corpo debba avere una velocità (§. 35.), che potrà esprimersi per $v+dv$. Onde essendo dv trascurabile per rapporto a v, potrà supporsi, che quel corpo nel tempuscolo dt siasi mosso equabilmente colla velocità v. E quindi anche lo spazietto ds percorso dal proposto corpo nel tempuscolo dt potrà aversi come descritto equabilmente colla velocità v. C. B. D.

§. 39. *Cor. I.* Dunque nel moto variabile di un corpo dovrà essere sempre

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

§. 40. *Cor. II.* E poichè nel moto equabile la velocità è costante, per esempio uguale ad a; sarà nel moto equabile

$$\frac{ds}{dt} = a:$$

e differenziando ambi i membri di questa equazione nella supposizione che dt sia costante, ne dovrà risultare

$$\frac{d^2s}{dt} = 0,$$

e dividendo ambi i membri per dt, potrà conchiudersi, che il moto di un corpo sia equabile, se risulti

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

PROP. IV. TEOR.

* §. 41. *Se due corpi ne percorrano due spazii con tal legge, che le velocità di essi nei punti, ove quei spazii son divisi propornalmente, sieno sempre proporzionali ai medesimi spazii; i tempi, in che essi li percorrono, dovranno essere tra se uguali.*

Dim. Sieno S ed s gli spazii, che quei corpi percorrono nei tempi T e t, e dS e ds rappresentino due elementi di S ed s a questi proporzionali, e presi a tali distanze dagli estremi corrispondenti degli spazii S ed s, che questi ne restino similmente divisi. In oltre sieno dT e dt i tempi, in che i proposti corpi percorrono gli spazietti dS e ds colle velocità V e v. Dovrà essere (§. 39.)

$$\frac{dS}{dT}=V, \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt}=v.$$

Ma sta $S:s::V:v$. Dunque dev' essere $v=\frac{Vs}{S}$, e la seconda delle precedenti equazioni si trasforma in questa

$$\frac{ds}{dt}=\frac{Vs}{S},$$

da cui si ha $\frac{Sds}{sdt}=V$.

Ma l'è pure $\frac{dS}{dt}=V$. Dunque dev' essere

$$\frac{Sds}{sdt}=\frac{dS}{dT}.$$

Onde essendo $s:S::ds:dS$, dev'essere pure $\frac{Sds}{s}=dS$;

e quindi $\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dT}$;

cioè $dT=dt$

Dunque gli spazietti dS e *ds* sono descritti in tempi uguali. E dimostrando lo stesso riguardo agli altri elementi degli spazii S ed *s*, saranno questi spazii contemporaneamente descritti. C. B. D.

PROP. V. TEOR.

§. 42. *Se un corpo partendo dalla quiete si muova per un tempo qualunque con moto uniformemente accelerato; il piano delle velocità di esso sarà un triangolo.*

Dim. Concepiscasi, che dal punto (fig. 3) A della retta AH indefinita verso H sieno computati i tempi decorsi dal principio del movimento del proposto corpo, e si prendano da esso punto sulla AH le parti AB, AC, AD, ec., che sieno come i numeri naturali 1, 2, 3, ec. Di poi dal punto B s' innalzi alla AH la perpendicolare BK, che ne dinoti la velocità del corpo alla fine del tempo AB. Sarà chiaro, che se dai punti C, D, E, ec. si elevino alla AH le perpendicolari CM, DO, EQ, ec., che ne dinotino le rispettive velocità del mobile alla fine dei tempi AC, AD, AE, ec.; tali velocità dovranno essere pure come i numeri naturali 2, 3, 4, ec. (§. 34.), ove la BK è uguale ad 1. Dunque i triangoli rettangoli ABK, ACM, ADO, ec. dovranno essere simili (6. El. VI); e quindi i punti K, M, O, ec. saranno allogati in una retta inclinata alla AH, e distesa pel punto A. Dunque il piano delle velocità del corpo in un tempo qualunque AH l'è un triangolo. C. B. D.

§. 43. *Cor. I.* Se il corpo (fig. 4.) A nel principio del moto uniformemente accelerato abbia la velocità AF; prendendo sulla linea AE dei tempi le parti AB, AC, AD, ec., che sieno come i numeri naturali 1, 2, 3, ec., ed elevando da' punti B, C, D, ec. le perpendicolari BH, CL, DN, ec., che sieno come le velocità del corpo alla fine dei tempi AB, AC, AD, ec.; i punti H, L, N, ec. saranno allogati in una retta inclinata alla AE. In fatti se congiungansi le FH, HL, LN, ec., e pei punti F, H, L, ec. conducansi le rette FG, HK, LM, ec. parallele ad AE; saranno retti gli an-

goli FGH, HKL, LMN, ec. ed uguali le rette FG, HK, LM, ec, al par delle altre AB, BC, CD, ec., che si son supposte uguali. Ma sono eziandio uguali le GH, KL, MN, ec, che ne dinotano gli aumenti di velocità, che il corpo si acquista nei tempi uguali e successivi AB, BC, CD, ec. (§. 34.). Dunque i triangoli FGH, HKL, LMN, ec. dovranno essere uguali e simili. Il perchè essendo paralleli i lati omologhi di essi, le di loro basi FH, HL, LN, ec. dovranno stare per dritto (32. El. VI.).

§. 44. *Cor. II.* Nello stesso modo si potrà dimostrare, che se un corpo si muova con moto uniformemente ritardato nel tempo EA, prendendo sulla retta EA le parti ED, EC, EB, ec, che sieno come i numeri naturali 1, 2, 3, ec, ed elevando dai punti E, D, C, ec. le perpendicolari EP, DN, CL, ec, che vadano decrescendo di quantità uguali; la linea distesa pei punti P, N, L, ec. sarà una retta inclinata alla AE.

PROP. VI. TEOR.

§. 45. *Se un corpo partendo dalla quiete si muova con moto uniformemente accelerato; gli spazii da esso descritti dal principio del movimento saranno come i quadrati dei tempi impiegati a descriverli, o delle velocità acquistatesi dal corpo alla fine dei medesimi tempi.*

Dim. Il triangolo (fig. 3.) AHZ rettangolo in H rappresenti il piano dalle velocità del proposto corpo, ove le parti della AF computate dal punto A ne dinotino i tempi decorsi dal princi-

pio del moto, e le corrispondenti ordinate rappresentino le velocità acquistatesi dal corpo alla fine di quei tempi. Egli è chiaro, che se con x si dinoti una qualunque ascissa presa dal punto A sulla AH, e con y la corrispondente semiordinata, dovrà stare $x : y$ in una ragione costante (§. 42), che potrà dinotarsi per quella di $m : n$. Il perchè dovrà essere $y = \frac{nx}{m}$, ed $x = \frac{my}{n}$. Ma il corpo nel tempuscolo dx si può concepire mosso equabilmente colla velocità y (§. 38.). Dunque lo spazio da esso corpo descritto in quel tempuscolo ne sarà dinotato da ydx, ovvero da $\frac{nxdx}{m}$. Ed integrando, si avrà l'intiero spazio descritto dal corpo nel tempo x uguale ad $\frac{nx^2}{2m}$, essendo la costante uguale a zero; e ponendo in quest' ultimo fratto $\frac{m^2y^2}{n^2}$ in luogo di x^2, lo stesso spazio ne sarà dinotato da $\frac{my^2}{2n}$. Ma x^2 ne dinota il quadrato del tempo decorso dal principio del moto del corpo, che partendo dalla quiete si muove con moto uniformemente accelerato, ed y^2 ne dinota quello della velocità acquistatasi dal corpo alla fine del tempo x. Dunque se un corpo ec. C. B. D.

§. 46. *Cor. I.* Essendo $\frac{nx^2}{2m} = \frac{nx}{m} \cdot \frac{x}{2}$, ed $\frac{nx}{m} = y$; dev' essere $\frac{nx^2}{2m} = y \cdot \frac{x}{2} = \frac{xy}{2}$. Cioè *lo spa-*

zio descritto da un corpo, che partendo dalla quiete si muove con moto uniformemente accelerato nel tempo x, *in fine del quale si trova avere la velocità* y, *è metà di quello, che nel medesimo tempo lo stesso corpo descriverebbe equabilmente colla velocità* y.

§. 47. *Cor. II.* Il perchè se la retta AH ne dinoti il tempo x decorso dal principio del movimento di un corpo, che partendo dalla quiete si muove con moto uniformemente accelerato, e la perpendicolare HZ elevata dall' estremo H rappresenti la velocità da esso acquistata alla fine del tempo AH; il triangolo AHZ dovrà dinotare lo spazio dallo stesso corpo descritto nel tempo AH.

§. 48. *Cor. III.* Dunque se le AB, AC, AD, ec. sieno come i numeri naturali 1, 2, 3, ec., i triangoli rettangoli ABK, ACM, ADO, ec., che sono come gli spazii descritti dal corpo nei tempi AB, AC, AD, ec. rispettivamente, saranno (§. 45.) come 1, 4, 9, 16, ec., che sono i quadrati di 1, 2, 3, 4, ec. E quindi il triangolo ABK, ed i trapezii BKMC, CMOD, DOQE, ec. dovranno essere come 1, 4—1, 9—4, 16—9, ec., cioè come i numeri 1, 3, 5, 7, ec. Ma il triangolo ABK, ed i trapezii BKMC, CMOD, DOQE, ec. sono come gli spazii descritti dal corpo nei tempi uguali e successivi AB, BC, CD, ec. Dunque *se un corpo partendo dalla quiete si muova con moto uniformemente accelerato; gli spazii da esso descritti in tempi uguali e successivi crescono come i numeri dispari* 1, 3, 5, 7, *ec.*

§. 49. *Cor. IV.* E poichè lo spazio, che viene descritto da un corpo, il quale partendo dal-

la quiete si muove con moto uniformemente accelerato, è metà del prodotto del tempo impiegato a descriverlo per la velocità acquistatasi alla fine dello stesso tempo (§. 46.); l'è chiaro, che se due corpi partendo dalla quiete nei tempi T e *t* descrivano gli spazii S ed *s* con moti uniformemente accelerati, e sieno V e *v* le velocità finali di essi; dovrà essere

$$S = \frac{1}{2} TV, \text{ ed } \quad s = \frac{1}{2} tv.$$

E quindi dovrà stare S : *s* :: (T : *t*)(V : *v*), (Pren. IV) T : *t* :: (S : *s*)(*v* : V), e V : *v* :: (S : *s*)(*t* : T). Dunque 1° *gli spazii percorsi da due corpi, che partendo dalla quiete si muovono con moti uniformemente accelerati, sono in ragion composta dei tempi e delle velocità finali*; 2.° *i tempi sono in ragion composta della diretta degli spazii percorsi e dell' inversa delle velocità finali*, 3° *e le velocità finali sono in ragion composta della diretta degli spazii e dell' inversa dei tempi.*

CAP. IV.

DELLE FORZE.

§. 50. *Def. XX.* Quella proprietà dei corpi, per mezzo di cui mantiensi in essi lo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, ove per avventura si ritrovino, finchè straniere cagioni non vengono a disturbarneli, chiamasi *Inerzia*, o *Forza d' Inerzia.*

§. 50. *Scol.* L' inerzia non solo impiegasi a mantener nei corpi i loro stati sian di quiete sian di moto, ma resiste eziandio ad ogni mu-

tazione di stato, che in essi forza straniera ne vuol indurre, e per tal ragione suol chiamarsi pure *forza d' inerzia*.

§. 52. *Def. XXI.* Quella forza, che risiede in un corpo in moto, chiamasi *forza motrice*.

§. 53. *Scol.* La forza motrice, che risiede in un corpo, qualora non vien distrutta da straniera cagione, lo spinge al moto compartendogli un grado di velocità proporzionale alla sua energia. Dunque dovrà aversi come un assioma, che *la velocità di un corpo sol ne provenga dalla forza motrice, che lo riempie, e che quella a questa debba essere sempre proporzionale*.

§. 54. *Def. XXII.* Chiamansi *potenze moventi* quelle cagioni, da cui ne son trasmesse ai corpi le forze motrici.

Tali sono le forze muscolari degli animali, l'elasticità di certi solidi e di certi fluidi, l' impeto di un corpo mosso, la forza dell'acqua profluente, quella del fuoco, ec., ed insin la mano del vivente Iddio, onde un tempo projettò i Pianeti e le Comete, l'è ancor essa una potenza movente.

§. 55. *Scol. I.* Le forze motrici sempre da straniere cagioni derivano: esse son soggette ad accrescersi, a diminuirsi, e ad estinguersi: sovente si trasfondono in altri corpi, e la di loro quantità può ancora adeguatamente misurarsi. Dunque non si divieta considerarle come cose inerenti a' corpi mossi, trasmessevi da cagioni esterne, e quivi dall' inerzia conservate. Che anzi con un espressione improntataci da' fluidi, ed assai proporzionata all' intelligenza de' Giovani, può dirsi, che *le forze motrici riempiano i corpi mossi*, *e che le potenze sien di loro*

come sorgenti. Ma conveniva distinguere le potenze dalle forze motrici, perchè le prime hanno differenti nature, mentre le forze motrici son tutte simili fra loro. Sebbene volendosi considerar le potenze pel solo valore, che esse hanno di muovere i corpi, si possano tutte riguardare come omogenee, e talora alle forze motrici pareggiarsi. Finalmente vuolsi quì avvertire, che la natura di queste forze n' è intieramente ignota al nostro intendimento, ma che poi la loro esistenza dal moto dei corpi si rileva, e dal riflettervi, che la materia sia del pari indifferente alla quiete, ed al moto, o che il moto ne' corpi non sia che contigente.

§. 56. *Scol. II.* Quantunque nel mondo vi sieno molte potenze, le quali differiscono tra loro sì nell' energia, come nel modo di agire, pure i Meccanici han saputo riporle nei due seguenti generi.

§. 57. *Def. XXIII.* Ogni potenza, che muovendo un corpo gli trasfonde in un istante una forza finita senza spingerlo di vantaggio, dicesi *forza istantanea.* Ed ogni potenza, che recando continue spinte ad un corpo vi genera una forza finita dopo esserne decorso un tempo ancor finito, chiamasi *forza continua.*

PROP. VII. TEOR.

§. 58. *Due potenze* P *e* p *spingendo rispettivamente due corpi di masse uguali vi debbono produrre due gradi di velocità proporzionali alle loro energie.*

Dim. Le forze rispettivamente impresse dalle potenze P e p a due corpi di uguali masse sono

effetti pieni di esse potenze: dunque siccome quelle sono proporzionali alle velocità (§. 53.) dei mentovati corpi, così le potenze P e p saranno alle medesime velocità proporzionali. C. B. D.

PROP. VIII. TEOR.

§. 59. *Per prodursi da due potenze spingenti disuguali uno stesso grado di velocità in due disuguali masse, debbono essere quelle in proporzione di queste.*

Dim. La potenza P spingendo un elemento M di materia gl' imprima un grado di velocità, che si dinoti per V. Sarà chiaro, che un' altra potenza P' uguale a P debba produrre la stessa velocità in un elemento M' di materia uguale al primo M. Dunque se intendansi congiunti gli elementi M ed M', sicchè formino un sol corpicciuolo, che ne sia spinto dalla potenza uguale a P+P', cioè uguale a 2P; l' aggregato di essi, cioè la massa 2M dovrà girne eziandio colla velocità V. Nello stesso modo può conchiudersi, che colla stessa velocità V si debbano muovere i corpicciuli 3M, 4M, 5M, ec. qualora ne sono rispettivamente investiti dalle potenze 3P, 4P, 5P, ec. Dunque le masse dei corpi debbono essere proporzionali alle forze spingenti, quando quelli si muovono con velocità uguali. C. B. D.

PROP. IX. TEOR.

§. 60. *Le potenze* P *e* p *sono tra se come le masse* M *ed* m *dei corpi, che spingono, e come le velocità* V *e* v, *che vi producono.*

Dim. Si concepisca, che una potenza ur-

tando il corpo M' uguale al primo dei proposti corpi ne produca la velocità v del secondo. Sarà (§. 58.) $P : \pi :: V : v$, e (§. 59) $\pi : p :: M' : m$. Dunque, componendo le prime e le seconde ragioni di queste due analogie, dovrà stare $P : p :: (V : v)\ (M : m)$, cioè $P : p :: MV : mv$. C. B. D.

§. 61. *Cor. I.* Se pongasi $p=1$, $v=1$, ed $m=1$; cioè se con p, v, ed m si dinotino rispettivamente l'unità di potenze, l'unità di velocità, e quella delle masse; dovrà stare $P : 1 :: MV : 1$. E quindi dev'essere $P=MV$, e $V = \frac{P}{M}$. Dunque *la velocità generata dalla potenza* P *nella massa* M *dev' essere dinotata dal quoto* $\frac{P}{M}$.

§. 62. *Cor. II.* L' energie delle forze di due corpi in moto si valutano dalle resistenze, che questi ne giungono a superare. Ma tali energie sono come le potenze, che rimuovendo i corpi dalla quiete ad essi ne impressero le di loro rispettive velocità. Dunque essendo queste potenze come le masse dei corpi, che spingono, e come le velocità in essi generate (§. 60.); dovranno essere le resistenze, che due corpi in moto son valevoli a superare, in ragion composta delle masse di essi corpi, e delle di loro rispettive velocità. Il perchè se con Q e q si dinotino le forze di due corpi in moto, con M ed m le masse di essi, e con V e v le di loro rispettive velocità; dovrà stare $Q : q :: (M : m)\ (V : v)$, cioè $Q : q :: MV : mv$. Onde se pongasi $q=1$, $v=1$, ed $m=1$; sarà $Q : 1 :: MV : 1$; e quindi dev'essere $Q=MV$.

§. 63. *Def. XXIV.* La quantità di moto di un corpo, che va per dritto equabilmente, e che suol dirsi *momento*, è il prodotto della di lui massa nella velocità.

§. 64. *Cor. I.* Dunque *le quantità di moto di due corpi sono tra se in ragion composta delle masse di essi corpi, e delle loro velocità* (§. 62.).

§. 65. *Cor. II.* E perciò 1.° *se le masse di due corpi sieno tra se uguali; le quantità di moto di essi dovranno essere nella ragione delle velocità, e viceversa*; 2.° *se le velocità di due corpi sieno tra se uguali; le quantità di moto di essi dovranno essere nella ragione delle masse, e viceversa*; 3.° *se le quantità di moto di due corpi sieno tra se uguali; le masse di essi debbono essere nella ragione inversa delle velocità; ed al contrario.*

§. 66. *Cor. III.* Dunque le picciole masse animate da grandi velocità possono avere quantità di moto uguali a quelle delle grandi masse animate da picciole velocità. Ma queste incontrandone grandi ostacoli son valevoli a farli oscillare, senza squarciarli; laddove quelle spingendone violentemente le parti degli ostacoli, che incontrano ne' loro sentieri, li squarciano senza farli in alcun modo oscillare.

PROP. X. TEOR.

§. 67. *La forza d'inerzia in ciascun corpo è come la quantità della materia, che esso contiene.*

Dim. Le potenze P e *p* spingendo rispettivamente i corpi M ed *m* vi producono uno stesso

grado di velocità, qualunque esso ne sia; dovranno essere quelle come le masse di questi (§. 59.). Ma le forze d' inerzia di diverse masse sono come le potenze, che spingendole dalla quiete impartiscono ad esse velocità uguali (§. 50.). Dunque le forze d' inerzia dei corpi M ed *m* saranno alle masse di essi proporzionali. C. B. D.

CAP. V.

DELLE TRE LEGGI DEL MOTO.

§. 68. L' inerzia della materia (§. 50.), è quella potente cagione, onde ogni corpo, che l' è in moto, ovvero in quiete trovasi assoggettato alle tre seguenti leggi, che dall' Immortale Newton, da cui furono proposte, *Leggi del moto* vengono chiamate.

Legge I. *Ogni corpo dee perseverare nel suo stato di quiete, o di moto equabile rettilineo finchè non venga disturbato da quello stato da straniere cagioni.*

Legge II. *Qualunque mutazione di movimento è proporzionale alla forza, che la produce, e si fa nella direzione di quella retta per la quale ne viene impressa la stessa forza.*

Legge III. *All' azione è sempre uguale e contraria la reazione.*

§. 69. *Cor.* Dunque niun corpo di per se vale a cangiarsi lo stato, in che si trova. Se l' è in quiete, vi vuole una causa esteriore, che lo muova. Se trovasi in moto, decsi a cagioni esteriori attribuire, perchè talora cangi di velocità, o torca dal dritto sentiere. Il perchè il

solo moto equabile rettilineo è *naturale* ai corpi, cioè quello, che per serbarvisi non ha bisogno di potenze esteriori.

§. 70. *Scol.* La terza legge del moto, come men chiara delle altre due, fu dal Newton coi tre seguenti esempli illustrata. Fingasi, ei dice in primo luogo, che un cavallo si tiri dietro un sasso legatoglisi con una fune, e che cammin facendo la spezzi, ovunque ciò ne accada. Osserverete ritirarsi con egual empito i tratti della fune l'uno verso il cavallo, l'altro verso la pietra. Dunque tanta è l'azione, che il cavallo esercitava su della pietra, quanto la reazione, che questa gli opponea.

2. Se io percuoto colla mia mano un corpo duro, l'energia della percossa, che gli arreco, è quanto l'impressione, che mi sento nella mano.

3. Qualora un corpo mosso incorre in un altro, la quantità di moto, che nel conflitto perdesi da quello, adegua la quantità di moto, che da questo si acquista.

§. 71. *Scol. II.* Quantunque la terza legge del moto sia stata dal Newton coi tre rapportati esempli illustrata, non pertanto essa sembra incompatibile colla comunicazione del moto, e ad altri finanche assurda. Poichè, dicono essi, se l'è vero che l'azione esercitata dal corpo A nell'altro B pareggi la reazione, che B ne oppone ad A, come potrà muoversi taluno di questi corpi, o tutti e due? come mai potrà muoversi il cavallo trascinandosi la pietra, quando ella sempre il ritiri verso di se con tanta forza, con quanta n'è dal cavallo continuamente investita? Ma cotali difficoltà ed altre non sono che ombre gittate nelle loro menti dalle oscure idee

di forza, e di azione, che si han formate, e basterà chiarir queste per togliere quelle immantinente. Eccone le vere idee di queste voci. La forza di un corpo mosso, per es. del corpo A, è quel principio attivo, che lo muove, e che si trasfonde in un altro, qualora quello in questo ne imbatta. L'azione del corpo A non è la forza, che lo anima, come credesi falsamente dai Giovanetti, ma è la trasfusione, o la comunicazione di questa forza ad un altro B (che quì suppongasi quiescente), e la reazione del corpo B consiste nel distruggere in A altrettanta forza, quanta ne ha egli dal corpo A ricevuta. O, a dir breve, l'azione del corpo A incorrente, e la reazione del quiescente non sono che le reciproche ed opposte impressioni, che nel momento dell'urto essi ne risentono, da che la materia dell'uno non può in quella dell'altro compenetrarsi, e dal volerne tutti e due nel proprio stato rimanersi. Or quantunque l'umano intendimento non giunga a percepire, nè ad immaginarsi in che modo si perda la forza di un corpo, e da un altro si riceva, pur non di meno la quantità della forza perduta e quella della forza acquistata sono i valori delle divisate impressioni. Dunque in ogni mutazione di stato, che si cagionano i corpi, sempre l'azione ne pareggia la reazione, e le si oppone.

CAP. VI.

DELLA COMPOSIZIONE E RISOLUZIONE DELLE FORZE.

§. 72. *Def. XXV.* Due forze insieme impresse ad un corpo diconsi *cospiranti*, se le loro direzioni formino una sola retta, ed entrambe spinganlo verso la stessa parte.

§. 73. *Def. XXVI.* Due forze insieme impresse ad un corpo diconsi *opposte*, se per direzioni; che formino una retta continuata, ne spingano il corpo a parti contrarie.

§. 74. *Def. XXVII.* Due forze insieme impresse ad un corpo diconsi *laterali*, se i valori e le direzioni di esse sieno espresse dai lati di un angolo rettilineo, ed insieme ne spingano un corpo, ch'è nel vertice dello stesso angolo.

§. 75. *Post. II.* Un corpo investito da due forze cospiranti dee muoversi per la comune loro direzione con una forza uguale alla loro somma.

§. 76. *Post. III.* Un corpo investito da due forze opposte dee muoversi per la direzione della maggiore di esse coll'eccesso di questa sulla minore.

§. 77. *Cor.* Qualora un corpo n'è investito da due forze opposte di uguali energie, queste si dovranno equilibrare, e 'l corpo rimarrà in quiete.

§. 78. *Post. IV.* Un corpo spinto da due forze laterali deesi muovere equabilmente con una determinata forza, e per una determinata direzione.

§. 79. *Scol.* Trascende l'umano intendimento il saper come Natura dalle forze laterali una sola

ne formi, che media si domanda, e come all'istante ella compia questo meraviglioso lavoro di azione. Intanto affinchè si possa agevolmente determinare tal forza, conviene quì rapportare le condizioni e le limitazioni, che essa dee avere.

I. La forza media dee avere una determinata direzione ed energia; onde non è che una sola.

II. Se le due forze laterali si uguaglino, e l'angolo dalle direzioni di esse formato sia di 180°; la forza media dovrà essere nulla.

III. La forza media pereggia la somma delle laterali, quando svanisce l'angolo, che comprendono le direzioni di queste forze. Ed essa sarà uguale alla differenza delle laterali, quando quell'angolo ne diviene di 180°.

IV. Il corpo (fig. 5.) A sia contemporaneamente animato dalle due forze, di cui una sia valevole a fargli percorrere in un certo tempo lo spazio AB, e l'altra valga a fargli percorrere nello stesso tempo lo spazio AC; esso dovrà percorrere equabilmente una certa retta AF nello stesso tempo, in che colla prima di quelle forze ne percorrerebbe la retta AB, e colla seconda l'altra AC. Il perchè se il corpo A ne sia spinto da un'altra forza, che valga a fargli percorrere la retta AD uguale ad AF e posta per diritto con questa; quel corpo contemporaneamente animato dalle tre forze AB, AC, AD dovrà reggersi in equilibrio.

V. Il perchè se il corpo A ne sia spinto da due forze, di cui la prima valga a fargli percorrere la retta AC nello stesso tempo, in che la seconda gli farebbe percorrere la AD; esso essendo insieme animato da quelle forze dovrà percorrere nel medesimo tempo la AL uguale ad

AB, e per dritto con questa. Lo stesso intendasi delle forze, che impresse al corpo A gli farebbero percorrere in tempi uguali le rette AD, AB.

VI. Dunque la forza AF dee rinvenirsi dalle laterali AB, AC nello stesso modo che la AL si determina per mezzo delle AC, AD. Lo stesso dicasi della forza AE, ch' è uguale e contraria alla AC.

VII. Dovrassi avere per genuino quel metodo; onde dalla forze laterali AB, AC si determini la forza AF, se adattandosi alle forze AC, AD dia la forza AL uguale e contraria alla laterale AB. Questo vuol intendersi anche riguardo all' altra laterale AC.

VIII. Se mai le forze laterali AB, AC si uguaglino, la direzione della forza media AF dovrà bisecare l' angolo delle direzioni di quelle forze, e viceversa. E se le forze AB, AC si uguaglino, e l' angolo BAC sia di 120°; l' angolo FAC sarà di 60°, e 'l suo conseguente CAD sarà pure di 120°. Onde l'angolo BAD dovrà essere anche di 120°. Il perchè essendo gli angoli BAF, CAF rispettivamente uguali agli altri DAL, DAE, sarà ciascuno di questi di 60°, e con ciò dovrà essere di 60° tanto l' angolo CAL, che l' altro BAE. Dunque le AL, AE dividono rispettivamente per metà gli angoli CAD, BAD; e quindi dev' essere CA uguale ad AD, ovvero ad AF. Vale a dire, *che se le forze laterali si uguaglino, e le direzioni di esse formino un angolo di 120°; la forza media dovrà pareggiare ciascuna delle laterali.*

IX. Dalle condizioni e limitazioni della forza media rapportate nei numeri III ed VIII si ri-

leva, che la forza media in parità di altre circostanze, dee variare secondo che si cangi l'angolo delle direzioni delle forze laterali.

§. 80. *Scol.* Queste considerazioni della forza media fluiscono dalla di lei natura, e sono sufficienti a geometricamente determinarla. Tal forza non è che una sola. Essa dee avere le condizioni quassù stabilite, e non altre. Dunque necessariamente dev' essere quella, ove tali condizioni e limitazioni abbiano luogo, ed a questo modo trovasi ordita la dimostrazione del seguente Problema.

PROP. XI. PROBL.

§. 81. *Date l' energie e le direzioni delle forze laterali* AB, AC; *ritrovare l' energia e la direzione della forza media.*

Sol. Gli estremi delle rette AB, AC, che esprimono l' energie e le direzioni delle forze laterali, si uniscano colla BC, la quale si divida per metà nel punto O, e si unisca la retta, AO. Dico, che il doppio della retta AO debba dinotare l' energia e la direzione della forza media.

La retta AO protraggasi da ambe le parti finchè ciascuna delle AF, AD di essa sia dupla, e si congiungano le due rette CD, BD, che si dividano per metà nei punti G ed H. Si congiungano le rette AG, AH, le quali si prolunghino fino ai punti L ed E, tal che sia AL doppia di AG, ed AE doppia di AH, e si uniscano le rette BF, FC, CL, LD, DE, EB.

E poichè i due lati AO, OB del triangolo AOB sono rispettivamente uguali ai due lati FO,

OC del triangolo FOC, e l'angolo AOB contenuto dai lati del primo è uguale all'angolo FOC contenuto dai lati del secondo; dovrà essere la base AB del primo uguale alla base FC del secondo, e l'angolo OAB uguale all'altro OFC. Ma i due angoli OAB, OFC sono alterni delle rette AB, FC. Dunque tali rette debbono essere parallele, e con ciò la figura quadrilatera ABFC dev'essere un parallelogrammo. In oltre, essendo FA uguale AD, e CG uguale a GD; dev'essere (2. El. VI.) la GA parallela alla CF. Ma alla CF l'è parallela la AB. Dunque le due BA ed AG debbono stare per dritto.

Or, a cagione de' triangoli simili DAG, DFC, sta DF : FC::DA : AG. Ma la DF è dupla di DA. Dunque dev'essere anche FC, o la sua uguale BA dupla di AG, e con ciò uguale ad AL. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che la AE stia per dritto con AC, e sia uguale a questa. E perciò la AF si determina dalle due AB, AC, come si determina la AL dalle due AC, AD, e la AE dalle AB, AD. In oltre, se svanisca l'angolo BAC; la AF ne diviene uguale alle due BA e BF, ovvero alle due BA ed AC. Che se l'angolo BAC facciasi di 180°; la retta AF diviene uguale alla differenza tra BF e BA, o sia tra AC ed AB. Finalmente se le due BA ed AC si uguaglino; la retta AF dovrà dividere per metà l'angolo BAC. Che se le rette AB ed AC si uguaglino, e l'angolo BAC sia di 120°; sarà di 60° tanto l'angolo FAC, ch'è metà di BAC, che l'altro FCA, ch'è supplemento di BAC. Il perchè nel triangolo FAC essendo di 60° ciascuno dei due angoli FAC, FCA, sarà pure di 60° il rimanente angolo AFC. Onde la FA sarà uguale tanto

a CA , che ad FC, ovvero ad AB. E sarà pure AL uguale a ciascuna delle AC , AD , ed AE uguale tanto ad AB, che ad AD. Or la forza media non è che una sola , e quella esser dee, ove si trovino verificate tutte le condizioni e limitazioni , e tutti que' rapporti alle laterali, che debbono appartenerle (§. 79.). Ma tali cose si è dimostrato appartenere alla AF. Dunque la AF dev' essere la forza media domandata. C. B. F.

§. 82. *Cor.* Dalle rette AB , AC , che ne dinotano le direzioni e l' energie delle forze laterali , si compisca il parallelogrammo ABFC , e si congiunga la diagonale AF. La AF dovrà dinotare l' energia e la direzione della forza media , la quale , come di per se comprendesi, l' è sempre minore delle due laterali AB, AC insieme prese.

§. 83. *Def. XXVII.* Chiamasi *parallelogrammo delle forze* quello , che si compie dalle due rette , le quali ne dinotino l' energie e le direzioni delle forze, che insieme ne spingano un corpo.

§. 84. *Cor. I.* E poichè le due forze laterali e la forza media sono come i lati AB, BF , FA del triangolo ABF , e questi sono come i seni degli angoli BFA , BAF , ABF debbono essere le forze laterali e la forza media come i seni degli angoli BFA , BAF , ABF. Ma l'angolo BFA è uguale al suo alterno FAC , e 'l seno dell' angolo ABF pareggia quello del suo conseguente BAC. Dunque le forze laterali , e la forza media sono come i seni degli angoli FAC, FAB , BAC ; cioè ciascuna di quelle tre forze è come il seno dell' angolo contenuto dalle direzioni delle altre due.

§. 85. *Cor. II.* Se con P e Q si dinotino l' energie delle forze laterali, le cui direzioni, formino l' angolo ϕ; la risultante R di tali forze dovrà esserne dinotata da $\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos.\phi)}$ come si ha dalla Trigonometria rettilinea.

§. 86. *Cor. III.* Il perchè se l' angolo ϕ sia di 90°, dovrà essere $\cos.\phi=0$, ed $R=\sqrt{(P^2+Q^2)}$.

PROP. XII. PROBL.

§. 87. *Data l' energia di una forza* AF, *e date le direzioni delle rette* AB, AC, *che si uniscano in un punto* A *della* AF, *colla quale sieno in un sol piano; risolvere la forza* AF *in due altre, che agiscano per le direzioni delle* AB, AC.

Sol. Si dinoti con R la forza AF, e con P e Q le forze, che agendo per le direzioni AB, AC ne diano per risultante la AF: e si ponga l' angolo $BAF=\alpha$, e l' angolo $FAC=\beta$. Dovrà stare (§. 84.)
$\text{sen}(\alpha+\beta):\text{sen}\,\beta::R:P$, e $\text{sen}(\alpha+\beta):\text{sen}\,\alpha::R:Q$.
E quindi dovrà essere

$$P=\frac{R\ \text{sen}\ B}{\text{sen}\ (\alpha+\beta)},\ \text{e}\ Q=\frac{R\ \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ (\alpha+\beta)}\ \ldots\ \text{C. B. F.}$$

PROP. XIII. TEOR.

§. 88. *Se le tre rette* (fig. 6.) AB, AC, AD *si uniscano nel punto* A *in modo che ciascuna di esse sia perpendicolare al piano, che passa per le altre due, e rappresentino le direzioni e l' energie di tre forze, che agiscano in un punto materiale A*: *dico, che il*

quadrato della risultante sia uguale alla somma dei tre quadrati fatti dalle componenti, e che ciascuna componente sia quanto la risultante multiplicata pel coseno dell' angolo contenuto dalla medesima risultante e da quella componente.

Dim. Dalle rette AB, AC, AD si compisca il parallelepipedo rettangolo CE, e si congiungano le AO, AE, CO, DO. Dovrà essere AE la risultante delle due AB, AD (§. 81.). Ma la EO è uguale e parallela ad AC. Dunque la figura AEOC è un parallelogrammo, e la AO dovrà dinotare l' energia e la direzione della risultante delle due forze AE, AC, ovvero delle tre AB, AD, AC. Ora essendo la EO perpendicolare al piano DB, dev' essere pure perpendicolare alla EA, che giace in esso piano e l' incontra. Dunque il quadrato di AO dev' essere uguale ai quadrati di AE e di EO, ovvero di AE e di AC. Ma il quadrato di AE pareggia i due quadrati di AD e di DE, ovvero di AD e di AB insieme presi. Dunque dev' essere il quadrato di AO uguale ai quadrati di AC, di AB, e di AD. Inoltre, poichè le rette AB, AC, AD sono perpendicolari rispettivamente ai piani BO, CO, DO, saranno retti gli angoli ABO, ACO, ADO. Dunque dee stare il raggio trigonometrico 1 al coseno dell' angolo OAB come OA ad AB, il raggio trigonometrico 1 al coseno dell' angolo OAC come OA ad AC, ed il raggio trigonometrico 1 al coseno dell' angolo OAD come OA ad AD. Il perchè dev' essere

$AB = AO \cos OAB$, $AC = AO \cos OAC$, ed $AD = AO \cos OAD$. C. B. D.

§. 89. *Cor. I.* Dunque se con X, Y, Z si

dinotino l' energie di tre forze ortogonali, che agiscano sopra un punto materiale, e sia R la risultante di esse, la quale colle X, Y, Z formi gli angoli α, β, γ rispettivamente; dovrà essere (§. 88.)

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$
$$X = R \cos. \alpha,$$
$$Y = R \cos. \beta,$$
$$Z = R \cos. \gamma.$$

§. 90. *Cor. II.* Se la forza, che agisce per la retta Z sia uguale a zero, la risultante delle forze X ed Y tra se perpendicolari, trovandosi nel piano delle medesime forze, sarà perpendicolare alla Z; e quindi le quattro precedenti equazioni si ridurranno alle tre seguenti

$$R^2 = X^2 + Y^2, \; X = R \cos. \alpha, \text{ ed } Y = R \cos. \beta.$$

§. 91. *Cor. III.* Dalle tre ultime equazioni del §. 88 si possono determinare l' energie delle forze ortogonali X, Y, Z, che colla data forza R formino gli angoli α, β, γ rispettivamente, ed abbiano per risultante la stessa forza R.

PROP. XIV. TEOR.

§. 92. *Determinare la risultante di un numero qualunque di forze, le cui direzioni concorrano in un punto, ed esibirne l' espressione analitica.*

Sol. Pel punto, ove concorrono le direzioni delle forze f, f, f, ec. si conducano tre assi ortogonali, che si dinotino con X, Y, Z, e sieno α, β, γ gli angoli, che la direzione della forza f forma cogli assi ortogonali X, Y, Z rispettivamente; α' β', γ' sieno gli angoli, che

la direzione della forza $f^{\prime}$ forma cogli assi X, Y, Z; e così per le altre forze. Sieno in oltre x, y, z l'energie delle componenti della forza f risoluta per le direzioni X, Y, Z (§. 91.); $x^{\prime}$, $y^{\prime}$, $z^{\prime}$ l'energie delle componenti della forza $f^{\prime}$ risoluta per le direzioni X, Y, Z; ec. Sarà chiaro, che debba essere (§. 89.).

$$x=f\cos.\alpha,\ y=f\cos.\beta,\ z=f\cos.\gamma,$$
$$x^{\prime}=f^{\prime}\cos.\alpha^{\prime},\ y^{\prime}=f^{\prime}\cos.\beta^{\prime},\ z^{\prime}=f^{\prime}\cos.\gamma^{\prime},$$
$$x^{\prime\prime}=f^{\prime\prime}\cos.\alpha^{\prime\prime},\ y^{\prime\prime}=f^{\prime\prime}\cos.\beta^{\prime\prime},\ z^{\prime\prime}=f^{\prime\prime}\cos.\gamma^{\prime\prime},$$
ec.

Ma le forze $f\cos.\alpha$, $f^{\prime}\cos.\alpha^{\prime}$, $f^{\prime\prime}\cos.\alpha^{\prime\prime}$, ec. agendo tutte per la direzione della retta X, equivalgono ad una sola forza, che agisce per la stessa direzione della retta X, e pareggia $f\cos.\alpha+f^{\prime}\cos.\alpha^{\prime}+f^{\prime\prime}\cos.\alpha^{\prime\prime}+$ ec., e le forze $f\cos.\beta$, $f^{\prime}\cos.\beta^{\prime}$, $f^{\prime\prime}\cos.\beta^{\prime\prime}$, ec. agiscono tutte per la direzione dell' asse Y, ed equivalgono la forza $f\cos.\beta+f^{\prime}\cos.\beta^{\prime}+f^{\prime\prime}\cos.\beta^{\prime\prime}+$ec., che agisce per la stessa direzione Y, e le forze $f\cos.\gamma$, $f^{\prime}\cos.\gamma^{\prime}$, $f^{\prime\prime}\cos.\gamma^{\prime\prime}$, ec. che agiscono per la direzione dell' asse Z, sono equivalenti alla forza $f\cos.\gamma+f^{\prime}\cos.\gamma^{\prime}+f^{\prime\prime}\cos.\gamma^{\prime\prime}+$ ec., che agisce per la stessa direzione Z. Dunque dev' essere (§. 89.).

$$R^2=(f\cos.\alpha+f^{\prime}\cos.\alpha^{\prime}+\text{ec.})^2+(f\cos.\beta+f^{\prime}\cos.\beta^{\prime}+\text{ec.})^2+(f\cos.\gamma+f^{\prime}\cos.\gamma^{\prime}+\text{ec.})^2$$

ed $$R=\sqrt{\left((f\cos.\alpha+f^{\prime}\cos.\alpha^{\prime}+\text{ec.})^2+(f\cos.\beta+f^{\prime}\cos.\beta^{\prime}+\text{ec.})^2+(f\cos.\gamma+f^{\prime}\cos.\gamma^{\prime}+\text{ec.})^2\right)}.$$ C. B. F.

§. 93. *Cor.* Se le direzioni delle forze $f, f^{\prime}, f^{\prime\prime}$, ec., che concorrono in quel punto, ove si uniscono i tre assi ortogonali, sieno tutte in uno

stesso piano, che può supporsi essere quello degli assi X ed Y; dovranno essere retti gli angoli, che si formano dalle direzioni di esse forze coll' asse Z. Onde sarà uguale a zero ciascuna delle espressioni $f\cos.\gamma$, $f^{\text{I}}\cos\gamma^{\text{I}}$, $f^{\text{II}}\cos.\gamma^{\text{II}}$ ec. Il perchè in tal caso la risultante delle forze f, f^{I}, f^{II}, ec. dovrà essere dinotata da

$$\sqrt{\left((f\cos.\alpha+f^{\text{I}}\cos.\alpha^{\text{I}}+f^{\text{II}}\cos\alpha^{\text{II}}+\text{ec.})^2+(f\cos.\beta+f^{\text{I}}\cos.\beta^{\text{I}}+f^{\text{II}}\cos.\beta^{\text{II}}+\text{ec.})^2\right)}.$$

§. 94. *Scol.* Se la direzione di una forza qualunque f sia fuori dell' angolo formato dai piani XY, ZY, ZX, dovrà essere ottuso uno degli angoli α, β, γ, o due di essi, o tutti e tre. Nel primo caso la componente della forza f, che agisce per la direzione di quell' asse, col quale essa fa l' angolo ottuso, sarà diretta per una direzione contraria a quella, secondo la quale agiscono le componenti delle altre forze, che collo stesso asse fanno angoli acuti. E lo stesso dicasi nel caso, in cui sieno ottusi due degli angoli α, β, γ, o tutti e tre. Ma il coseno di un angolo ottuso è sempre negativo. Dunque l' espressione analitica della risultante di un numero qualunque di forze, le cui direzioni concorrono in uno stesso punto, dev' essere sempre dinotata dal radicale quadratico esibito nella Prop. prec., ove bisogna tener conto dei segni, che hanno i coseni degli angoli α, β, γ, α^{I} β^{I}, γ^{I}, ec.

PROP. XV. PROBL.

§. 95. *Date l' energie di due forze, che per direzioni parallele agiscano sopra un corpo solido; determinare l' energia e la direzione della risultante di esse.*

Sol. Cas. I. Siano (fig. 7.) AC, BD l' energie di due forze, che si trovino applicate per direzioni parallele a due punti A e B di un corpo solido: e suppongasi primieramente, che tali forze tendano verso le stesse parti. Si congiunga la AB, che si prolunghi verso P e Q, e si ponga AP uguale a BQ. Di poi si concepisca, che AP e BQ sieno due forze uguali applicate al proposto corpo insieme colle altre AC, BD, ed agenti per opposte direzioni. Sarà chiaro, che distruggendosi le due forze AP, BQ, la risultante delle quattro forze AP, AC, BD, BQ debba essere identica alla risultante delle due AC, BD. Ma compiendo i parallelogrammi APEC, BDFQ, e congiungendo le diagonali AE, BF, la risultante delle quattro forze AP, AC, BQ, BD è identica alla risultante delle due AE, BF. Dunque la risultante delle due forze parallele AC, BD dev' essere identica alla risultante delle due AE, BF. Si prolunghino le due AE, BF finchè s' incontrino nel punto O. Egli è chiaro, che le due forze AE, BF si possono intendere applicate nel punto O, ed agire per le direzioni OE, OF. Intanto dal punto O sulle OE, OF si prendano le parti OL, OM rispettivamente uguali ad AE, BF, e per lo stesso punto si distendano la retta HOK parallela ad AB, e la OX parallela a ciascuna delle AC, BD. Di poi la forza OL si risolva

(§. 87.) nelle due OH, OX, che agiscono per le direzioni delle rette HOK, ed OX, e la forza OM si risolva nelle due OK, OY, che agiscono per le stesse direzioni.

E poichè le due OH ed AP sono parallele, e vengono intersegate dalla terza EO; dev' essere l' angolo EAP uguale all' altro LOH. Ma per esserne EP parallela ad LH, l' è pure l' angolo EPA uguale all' altro LHO, ed è poi EA uguale ad LO. Dunque dev' essere AP uguale ad OH, ed EP uguale ad LH, ovvero OX uguale ad AC. Similmente si dimostra esserne OK uguale a BQ, ed OY uguale a BD. Dunque la risultante delle due forze parallele AC, BD dev' essere identica alla risultante delle quattro forze OH, OX, OK, OY, di cui le due OH, OK, perchè uguali e contrarie, si distruggono. Ma le due OX, OY coincidono. Dunque la risultante di due forze parallele, che tendono verso le stesse parti, è parallela alle direzioni di esse, ed è quanto la loro somma.

In oltre essendo OX : XL :: OG : GA, YM : YO :: GB : GO, ed XL uguale ad YM; saranno le tre grandezze OX, XL, ed YO in proporzione perturbata colle altre tre GB, GO, e GA. Onde per equalità perturbata dovrà stare OX:OY, o sia AC:BD::GB:GA. Vale a dire, che la risultante di due forze parallele, che tendono verso le stesse parti, è parallela alle loro direzioni, pareggia la loro somma, e divide la retta, che congiunge i punti, dove esse sono applicate, in due parti, che sono reciprocamente proporzionali alle energie di esse forze.

Cas. II. Suppongasi in secondo luogo, che (fig. 8.) le due forze parallele BE, CD, applica-

te ai punti B e C di un corpo solido, agiscano per opposte direzioni.

Facciasi BE—CD : CD :: BC alla quarta BA. Egli è chiaro, che se nel punto A si applichi una forza AL uguale all' eccesso di BE sopra CD, e nel punto C si applichi una forza CF uguale e contraria a CD; la forza BE pel Cas. I sarà equivalente alle due AL, CF. Onde distruggendosi le due CF, CD, perchè uguali e contrarie, dovrà restarvi la sola forza AL. Dunque la risultante di due forze parallele, che agiscono per opposte direzioni, è parallela ad esse forze, pareggia la loro differenza, agisce per la direzione della maggiore, e trovasi applicata in un punto del prolungamento della retta, che congiunge i punti, ove quelle forze sono applicate, che dista dal punto di applicazione della maggiore per una retta, ch'è quarta proporzionale in ordine alla differenza delle due forze parallele, alla minore di esse, ed alla distanza dei punti di applicazione delle medesime forze parallele. C. B. F.

PROP. XVI. PROBL.

§. 96. *Determinare la risultante di un sistema di forze parallele, ed esibirne l'espressione analitica.*

Sol. Sieno (fig. 9.) AE, BF, CG, DH, ec. le direzioni delle forze parallele, che si dinotino con P, P', P'', ec., ed esse si prolunghino finchè ne incontrino un piano EFGH nei punti E, F, G, H, ec. Si congiungono le EF, FG, GH, ec., e sia M il punto della EF, pel quale passi la risultante R delle due forze parallele P

e P'. Sarà $R = P \pm P'$, secondo che le forze AE, BF tendano verso le stesse parti, o pure a parti opposte. Si congiunga il punto M coll'altro G colla retta MG, nella quale si determini il punto N, dove agisce la risultante R' delle due forze parallele R e P''. Dovrà essere $R' = R \pm P'' = P \pm P' \pm P''$. Nello stesso modo si determina la risultante di un qualsivoglia numero di forze parallele: e si rileverà essere tal risultante parallela alle direzioni di esse forze, ed uguale alla loro somma, se le forze parallele tendano verso le stesse parti, e se delle forze parallele alcune tendano ad una parte, ed altre ad un' altra, la risultante di esse sarà uguale alla somma di quelle, che tendono ad una parte, diminuita della somma delle altre, che tendono alla parte opposta, ed essa sarà diretta per la direzione di quelle, che fanno una maggior somma. C.B.F.

§. 97. *Cor.* Da quanto si è conchiuso nelle due precedenti Proposizioni si rileva, che se le forze applicate ad un corpo mantenendosi parallele cangino direzioni; la risultante di esse si manterrà eziandio parallela alle direzioni di quelle forze, ma passerà sempre per un medesimo punto. Questo punto dicesi *centro delle forze parallele* applicate al corpo.

C A P. VII.

PRINCIPII, CHE SI DERIVANO DALLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

PROP. XVII. TEOR.

§. 98. *Se le tre forze (fig. 5.)* AB, AC, AD *applicate al corpo* A *si equilibrino; le loro direzioni dovranno giacere in uno stesso piano: e ciascuna di esse sarà come il seno dell' angolo compreso dalle direzioni delle altre due.*

E se le direzioni delle tre forze AB, AC, AD *giacciano in uno stesso piano, e l' energia di ciascuna sia come il seno dell' angolo delle direzioni delle altre due; tali forze si dovranno equilibrare.*

Dim. Par. I. La forza AD per equilibrarsi colle altre due AB, AC vuol essere (§. 81.) uguale e contraria ad AF equipollente alle due AB, AC. Dunque siccome le tre rette AB, AC, AF sono sempre in uno stesso piano, e ciascuna di esse è come il seno dell' angolo (§. 84.) contenuto dalle altre due; dovranno essere pure le tre AB, AC, AD in uno stesso piano, e ciascuna di esse sarà come il seno dell' angolo contenuto dalle altre due.

Par. II. Si prolunghi la DA verso F. Saranno le tre AB, AC, AF in uno stesso piano, siccome per ipotesi lo sono le tre AB, AC, AD. Dunque se per B si distenda alla retta AC la parallela BF; questa dovrà incontrarne la AF in un punto F. Si congiunga la CF. E poichè sta BA:AC :: sen. CAD : sen. BAD, ed è poi sen.

CAD=sen. CAF=sen. BFA , e sen. BAD=sen. BAF, dee star pure BA:AC::sen BFA:sen.BAF. Ma sen.BFA a sen.BAF sta come BA a BF. Dunque dee stare BA:AC::BA:BF ; e quindi dev' essere AC= BF. Ma le rette AC, BF sono parallele. Dunque la figura ABFC è un parallelogrammo. In oltre, poichè AB sta ad AF come sen. AFB a sen. ABF, ed è sen. AFB=sen. FAC=sen. CAD , e sen. ABF =sen. BAC ; dee star pure AB: AF :: sen. CAD sen. BAC. Ma sen. CAD a sen. BAC sta come AB ad AD. Dunque dee stare AB:AF::AB:AD. Il perchè dev' essere AF uguale ad AD. Ma la AF dinota l' energia e la direzione della risultante delle due forze AB , AC , ed essa è poi diametralmente opposta alla forza AD. Dunque le tre forze AB, AC, AD applicate al corpo A lo mantengono in equilibrio. C. B. D.

§. 99. *Def. XXIX.* Se la potenza (fig. 10.) AN applicata al corpicciuolo A si risolva nelle due forze laterali AP , AQ , di cui la prima abbia la sua direzione coincidente colla retta MAP , che passi per A , e la direzione dell'altra sia perpendicolare alla stessa retta ; la prima forza si dirà *forza stimata secondo la retta* MAP.

PROP. XVIII. TEOR.

§. 100. *Se le potenze* (*fig.* 10.) RA , *r*A , NA , *n*A , *ec. comunque applicate al corpicciuolo* A *si equilibrino* ; *le loro forze stimate secondo una qualunque retta* MAP , *che passi per esso corpicciuolo, si dovranno sempre distruggere tra loro.*

Dim. S' è possibile non si elidano le forze

MA, *m*A, ec. colle altre PA, *p*A, ec., ma la differenza di quelle e di queste esprimasi dalla TA. E poichè le direzioni delle altre laterali QA, *q*A, SA, *s*A, ec. sono perpendicolari alla retta MAP nel punto A, esse dovranno sempre ritrovarsi nel piano *q*GS, che passa per A, ed insiste perpendicolarmente alla retta MAP. Or se queste forze si distruggano fra loro, il corpicciuolo A si troverà animato dalla sola forza AT, e con questa dovrà girne per AT, contro la supposizione dell' equilibrio. Se poi dalle forze QA, *q*A, SA, *s*A, ec. ne risulti la forza media AG, la quale dee stare nel piano *q*GS; lo stesso corpicciuolo sarà dalle due forze AT, AG insieme animato, e dovrà eziandio muoversi: lo che ripugna all' ipotesi. Dunque le forze stimate secondo la retta MAP si distruggono tra loro. C. B. D.

§. 101. *Cor. I.* Se le forze stimate secondo la retta MAP si distruggano tra loro; il corpicciuolo investito dalle potenze RA, *r*A, NA, *n*A, ec., o rimarrà in quiete, o dovrà muoversi per una perpendicolare alla MP, che passi per A.

§. 102. *Cor. II.* Ritrovandosi le direzioni delle potenze RA, *r*A, NA, *n*A, ec. in uno stesso piano, quivi dovranno pur giacerne le RM, *rm*, NP, *n*P, ec. perpendicolari alla MAP. E siccome in caso di equilibrio le rette QA, SA, ec. sono uguali alle altre *q*A, *s*A, ec., così sarà pure RM+NP+ec. uguale ad *rm*+*np*+ec.

PROP. XIX. TEOR.

§. 103. *Vi sarà equilibrio tra più potenze comunque applicate ad un corpicciuolo (fig. 11.)*

C, *se condotte per esso le tre rette* AB, A'B', A'' B'', *che non giacciano tutte in uno stesso piano, le forze stimate secondo queste rette vicendevolmente si distruggano tra di loro.*

Dim. Se non vi è equilibrio tra queste potenze, il corpicciuolo C dovrà muoversi per la retta CN (§. 101.) perpendicolare a ciascuna delle tre AB, A'B', A''B''. Dunque una stessa retta sarà perpendicolare a tre rette, che non istanno in uno stesso piano: lo che ripugna. C. B. D.

§. 104. *Cor.* Qualora le direzioni delle potenze (fig. 10.) RA, *r*A, ec., di cui vuol saggiarsi l'equilibrio, giacciano tutte in uno stesso piano; basterà condurre pel corpicciuolo e nel piano di quelle forze due rette MAP, QA*q* tra se perpendicolari, e poi vederne se vicendevolmente si distruggano le forze stimate secondo queste rette. Imperciocchè se questo corpo non sia in riposo dovrebbe muoversi per AQ (§.101.) e per MP nello stesso tempo. Lo che ripugna.

§. 105. *Def. XXX. Centro di una potenza* è quel punto, da cui può concepirsi, che ella si diffonda.

§. 106. *Def. XXXI.* Se imprimasi un picciol moto ad un corpicciuolo, ove si trovino applicate più potenze in equilibrio, ogni momentaneo decremento o incremento della distanza del corpicciuolo dal centro di ciascuna potenza si dirà *spazietto di accesso o di recesso.* I divisati decrementi, o incrementi delle distanze si dicono pure *velocità virtuali positive*, o *negative delle stesse potenze.* E 'l prodotto della potenza nella sua velocità virtuale chiamavasi dall' acutissimo Giovanni Bernulli *energia della potenza.*

§. 107. *Scol.* Rappresentino (fig. 12.) RA, *r*A, NA, *n*A, ec. più potenze applicate al corpicciuolo A, e tra di loro equilibrate, i di cui centri sieno i punti R, *r*, N, *n*, ec, e poi s' imprima ad esso corpicciuolo un picciol moto per A*a*, sicchè la retta A*a* sia infinitesima. Si tirino le rette R*a*, *ra*, N*a*, *na*, ec., e coi centri R, *r*, N, *n*, ec., e cogl' intervalli R*a*, *ra*, NA, *n*A, ec. si descrivano gli archetti circolari B*a*, *ba*, CA, *c*A, ec. Saranno le retticciuole BA, *b*A, ec. gli spazietti di accesso, e le altre C*a*, *ca*, ec. quei di recesso. Le medesime rette BA, *b*A, ec. sono le velocità virtuali positive delle potenze RA, *r*A, ec., e le altre CA, *ca*, ec. son le velocità virtuali negative delle potenze NA, *n*A, ec., le di cui energie saran dinotate dai rettangoli RAB, *r*A*b* NA. *a*C, *n*A. *ac*, ec.

PROP. XX. TEOR.

§. 108. *Se le forze* RA, *r*A, NA, *n*A, *ec. applicate al corpicciuolo* A *lo mantengano in equilibrio; le forze* RA, *r*A, *ec. multiplicate pei loro spazietti di accesso* AB, A*b*, *ec. saranno uguali alle rimanenti forze* NA, *n*A, *ec. multiplicate pei loro spazietti di recesso* C*a*, *ca*, *ec.*

Dim. A cagione dell' equilibrio di queste potenze, le loro forze MA, *m*A, ec. stimate secondo la retta A*a*M sono uguali alle altre forze PA, *p*A, ec. (§. 100.), cioè a dire tutti i rettangoli MA*a*, *m*A*a*, ec. uguagliano tutti gli altri PA*a*, *p*A*a*, ec. E poichè i due triangoli rettangoli MAR, BA*a* han di comune l' angolo

acuto RAM, sono essi equiangoli, e simili tra loro: Dunque sarà RA : AM::A*a*:AB, e 'l rettangolo MA*a* sarà uguale all' altro di RA in AB. Similmente dall' essere i triangoli *r*A*m*, PAN, *p*A*n*, ec. rispettivamente simili agli altri A*ab*, A*a*C, A*ac*, ec. si dimostrerà, che i rettangoli *m*A*a*, PA*a*, *p*A*a*, ec. uguaglino rispettivamente gli altri di *r*A in A*b*, di NA in *a*C, di *n*A in *ac*, ec. Dunque sarà RA. AB+*r*A. A*b*+ec=NA. *a* C+*n*A.*ac*+ec. C. B. D.

§. 109. *Cor.* Essendo l' energie delle potenze RA, *r*A, ec. uguali all' energie delle altre NA, *n* A, ec., le forze di quelle e di queste, stimate secondo la stessa retta MAP, saran pure tra se uguali.

§. 110. *Scol.* In questo Teorema racchiudesi quel principio della Statica quanto semplice, altrettanto generale, che *Principio delle velocità virtuali* si domanda. I primi stami di esso formaronsi nella mente del gran Galilei, e l' acutissimo Giovanni Bernulli il rese più fecondo e completo di quel che quassù si è enunciato. Il Varignonio cercò dimostrarlo sinteticamente nella Sezione IX de la Nouvel. Mec., e 'l Principe de' moderni Analisti il Signor De La Grange ne ha con dell' analisi agevolato l' uso, e lo ha poi applicato anche al movimento dei corpi animati da più forze. Intanto la voce *Principio* quì non vuol dinotare una verità primitiva, donde copiosamente si derivino delle altre, ma sì bene una Proposizione, che dimostra l' essenzial carattere di ogni sistema di forze tra se equilibrate.

PROP. XXI. TEOR.

§. 111. *Se un corpicciuolo, cui sieno applicate più potenze intendasi spinto con picciolo moto per tre diverse direzioni non giacenti in uno stesso piano, e sempre in ciascun caso si avveri, che le potenze multiplicate per gli spazietti di accesso pareggino le altre multiplicate per gli spazietti di recesso; coteste potenze saran tra loro in equilibrio.*

Dim. In ciascuno di questi casi l' energie delle potenze positive sono uguali alle negative delle altre: dunque dovran distruggersi le loro forze stimate secondo quella retta per la quale intendasi spinto il corpicciuolo (§. 109.). E quindi tali potenze dovran tra loro equilibrarsi (§. 103.). C. B. D.

C A P. VIII.

DELLA COLLISIONE DEI CORPI.

* §. 112. Le forze motrici dei corpi, che si percuotono, con certe leggi vengonsi a modificare. Dunque è ragionevole, che da principii meccanici io le ritragga, e distintamente ve le dimostri.

* §. 113. *Def. XXXII.* Un corpo dicesi *duro*, se comunque premuto o percosso non cangi di figura.

* §. 114. *Def. XXXIII.* Chiamasi corpo *molle* quell' altro, che ad ogni urto o pressione, che gli si arrechi, comprimesi agevolmente, senza che tenti di racquistare la sua prima figura.

* §. 115. *Def. XXXIV.* Un corpo dicesi

elastico, se per mezzo della percossa, o della pressione gli si cangi la figura, ma esso può racquistarsela, tosto che l' azione del corpo premente o percuziente sia cessata. Ed un corpo si dirà *perfettamente elastico*, se la restituzione della figura eseguasi con forza uguale a quella, che gli s' impresse.

* §. 116. *Def. XXXV.* I corpi duri ed i molli sogliono chiamarsi *corpi inerti*, e quei che sono perfettamente elastici, si dicono *semplicemente elastici o attuosi.*

* §. 117. *Scol.* In questa disamina i corpi, che si percuotono, si sogliono dai Meccanici considerare come tante sfere, ciascuna delle quali abbia la materia nel suo volume uniformemente ripartita.

* §. 118. *Def. XXXVI.* Un corpo si dice *imbattere direttamente* in un altro, qualora quello solamente, o tutti e due muovansi nella retta, che attraversi i loro centri, e poi si urtino: ed in ogni altro caso l' urto sarà *obbliquo*.

* §. 119. *Def. XXXVII.* Il corpo A incorre nell' altro B, se questo stia in quiete, o pur si muova lentamente per la stessa direzione di A, che direttamente lo *investe*.

* §. 120. *Def. XXXVIII.* Due corpi *incontransi* tra loro se venendo per opposte direzioni si urtino direttamente.

* §. 121. *Def. XXXIX. L' impressione*, che fa un corpo su di un altro, è quanto la quantità di moto, che si acquista da uno, o che perdesi dall' altro.

* §. 122. *Def. XL.* Dicesi *potenza immateriale* quel principio motore, che si concepisce risedere in un soggetto sgombro d' inerzia.

* §. 123. *Scol.* I vapori rammassati in un angusto luogo hanno una forza quasi infinita rispetto all' inerzia della materia, che essi racchiudono. Un poco di aria assai condensata, o assai riscaldata acquista un elatere ben mille volte maggiore dell' inerzia di lei. Ed in simil guisa su di certi altri corpi ragionando può concludersi, che in Natura vi sieno delle potenze spingenti pressocchè immateriali; sicchè queste tali potenze qui definite, e delle quali dobbiamo avvalerci per dimostrare con un metodo diretto le leggi della collisione dei corpi, non son meri concetti di nostra mente, ma sembrano aver fondamento in Natura.

* §. 124. *Post. V.* La quantità di moto di un corpo è quanto la potenza immateriale, che quivi varrebbe a produrla.

* §. 125. *Cor.* Se il momento del corpo C esprimasi per M, e per P l' energia di quella potenza immateriale, che avrebbelo prodotto in esso corpo; la velocità di C sarà il quoto, che nasce dividendo P per la massa di C. Imperocchè il momento diviso per la massa ne reca la velocità del mobile (§. 64.).

PROP. XXII. PROBL.

* §. 126. *Esporre un metodo genuino, onde nell' urto dei corpi* A *e* B *si possano definire i loro momenti dopo dell' urto, dati quelli, che ne aveano prima.*

Sol. Il momento del corpo A prima dell' urto è quanto una potenza immateriale P, che quivi potrebbelo produrre: e 'l momento dell' altro B prima dell' urto è anche uguale alla

potenza immateriale p, che varrebbe a produrlo in quest'altro corpo (§. 124.). Dunque sostituendo le potenze immateriali P e p in luogo delle quantità di moto dei corpi A e B prima dell' urto, potrem supporre, che la somma dei corpi A e B, i quali nell' atto del conflitto tengonsi fermi per pochi istanti, e come uniti fra loro, sia spinta dalla somma, o dalla differenza delle potenze P e p, secondo che i medesimi corpi si urtino dalla stessa parte, o a parti opposte (§§. 75 e 76). Ma qualora la potenza $P \pm p$, spinge la massa dei corpi A e B congiunti fra loro, la velocità, che ciascuno di essi ne riceve, è quanto il quoto, che nasce dividendo $P \pm p$ per $A + B$ (§. 61.). Dunque la medesima velocità otterrassi nei corpi A e B dopo dell' urto, dividendo per l' aggregato di essi la somma o la differenza dei loro momenti prima dell' urto, secondo che vadano entrambi in ver la stessa parte, o a parti opposte. E di quì poi, multiplicando la massa di A per questa velocità comune, avrassi il momento di A dopo dell' urto: e multiplicando la massa di B per la stessa velocità comune, si otterrà il momento di B dopo dell' urto.

Or questo l' è vero nei soli corpi inerti; ma nei corpi attuosi oltre a questo moto, che per l' inerzia della materia in siffatto modo loro si distribuisce, un' altro per lo spiegamento delle loro parti ad essi pur si arreca, la cui quantità e direzione sarà quaggiù divisata.

PROP. XXIII. PROBL.

* §. 127. *Date le velocità e le masse di due corpi inerti, dei quali uno direttamente incorre nell' altro; ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.*

Sol. Sieno M ed m le masse dei corpi A e B, dei quali il primo direttamente incorre nell' altro B, e sieno V e v le rispettive velocità di quei corpi. Sarà MV la quantità di moto del corpo A, ed mv quella del corpo B. Dunque nell' atto dell' urto del corpo A coll' altro B, per quel che si è detto nella Prop. prec., le due masse M ed m, tenendosi ferme e come unite, debbono avere una quantità di moto, che è dinotata da $MV+mv$. E quindi la velocità comune dei proposti corpi dopo dell' urto dev' essere rappresentata da $\frac{MV+mv}{M+m}$. C. B. F.

* §. 128. *Cor. I.* Se il corpo B stia in riposo, e l' altro A vada ad urtarlo, dovrà essere $v=o$, e la comune velocità di quei corpi dopo dell' urto ne sarà dinotata da $\frac{MV}{M+m}$. Onde se la massa del corpo B sia infinita rispetto a quella dell' altro A, sarà $\frac{MV}{M+m}$ un infinitesimo rispetto a V, e quindi in questo caso non vi dovrà essere moto dopo dell' urto.

* §. 129. *Cor. II.* Che se i corpi A e B sieno di uguali masse sarà $M=m$, ed $\frac{MV+mv}{M+m}$

$= \frac{M(V+v)}{2M} = \frac{V+v}{2}$. Dunque *se un corpo incorra direttamente in un altro di ugual massa; la velocità comune dei due corpi dopo dell' urto sarà quanto la semisomma delle velocità, che essi aveano prima di urtarsi.*

* §. 130. *Cor. III.* E poichè la quantità di moto del corpo A prima dell' urto pareggia MV, e quella dello stesso corpo dopo dell' urto è uguale ad $\frac{MV+mv}{M+m}M$, cioè ad $\frac{MMV+Mmv}{M+m}$; sarà la quantità di moto, che si è perduta da A ed acquistata da B uguale ad

$MV - \frac{MMV+Mmv}{M+m}$, o sia ad $\frac{MmV-Mmv}{M+m}$.

PROP. XXIV. PROBL.

* §. 131. *Date le velocità e le masse di due corpi inerti A e B, che scambievolmente s' incontrino; ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.*

Sol. Si facciano le stesse indicazioni del Problema precedente. Sarà MV la quantità di moto del corpo A, ed mv quella del corpo B. Dunque nell' atto che il corpo A ne incontra l'altro B, trovandosi come unite le masse dei corpi A e B, la somma $M+m$ di tali masse avrà la quantità di moto dinotata da $MV-mv$. Il perchè la velocità comune dei due corpi dopo essersi incontrati ne sarà espressa da $\frac{MV-mv}{M+m}$.

C. B. F.

* §. 132. *Cor. I.* Se la massa del corpo A pareggi quella dell'altro B, la velocità comune dei due corpi dopo essersi incontrati ne sarà dinotata da $\frac{M(V-v)}{2M}$, cioè da $\frac{V-v}{2}$. Dunque *se due corpi di masse uguali s' incontrino scambievolmente; la velocità comune dopo dell' incontro sarà quanto la semidifferenza delle velocità, che essi aveano prima d' incontrarsi.*

* §. 133. *Cor. II.* Che se poi la quantità di moto MV del corpo A pareggi la quantità di moto mv del corpo B; sarà $\frac{MV-mv}{M+m}=o$. Dunque *se due corpi s' incontrino con uguali quantità di moto; dopo dell' urto ciascuno di essi dovrà restarne in quiete.*

PROP. XXV. PROBL.

* §. 134. *Date le velocità e le masse di due corpi A e B perfettamente elastici, di cui il primo incorra nell' altro; si addimandano i loro momenti dopo dell' urto.*

Sol. Si facciano le stesse indicazioni de' prec. Problemi. Egli è chiaro, che se nel momento dell' urto i corpi A e B si considerino come non elastici; dovrà essere la quantità di moto del corpo A dopo dell' urto (§. 127.) uguale ad $\frac{MV+mv}{M+m}M$, e quella del corpo B uguale ad $\frac{MV+mv}{M+m}m$. Ma appena fatta l' impressione della

forza del corpo A nel corpo B, mutansi le loro figure con tanta forza, con quanta il corpo A ha agito nell' altro B, cioè colla forza (§.130.) $\frac{MmV-Mmv}{M+m}$. Dunque, per la perfetta elasticità di essi corpi, colla medesima forza si dovranno restituire le loro figure dopo dell' urto. Ma dopo dell' urto i proposti corpi non si possono spiegare verso quella parte, ove si toccano; poichè ivi per le uguali e contrarie azioni e reazioni si tengono quasi fermi ed immobili. Dunque le parti dei corpi A e B si debbono spiegare per le direzioni opposte a quelle, ove furono compresse: e la forza, onde in entrambi i corpi si esegue un tale spiegamento, sarà uguale ad $\frac{MmV-Mmv}{M+m}$. Per la qual cosa la quantità di moto del corpo A dopo dell' urto sarà uguale ad $\frac{MMV+Mmv}{M+m}-\frac{MmV-Mmv}{M+m}$, cioè ad $\frac{MMV+2Mmv-MmV}{M+m}$, e quella del corpo B sarà uguale ad $\frac{MmV+mmv}{M+m}+\frac{MmV-Mmv}{M+m}$, cioè ad $\frac{mmv+2MmV-Mmv}{M+m}$, e sarà poi $\frac{MV+2mv-mV}{M+m}$ la velocità del corpo A dopo dell' urto, ed $\frac{mv+2MV-Mv}{M+m}$ quella del corpo B. C. B. F.

* §. 135. *Cor. I.* Sia $M=m$. Dovrà essere

la velocità del corpo A dopo dell' urto uguale a $\frac{2Mv}{2M}$, cioè a v, e quella del corpo B uguale a $\frac{2MV}{2M}$, o sia a V. Dunque *se due corpi sono di uguali masse ed elastici, ed uno di essi nell' altro incorra, amendue si muoveranno dopo dell' urto per la comune direzione iscambiandosi fra loro quelle velocità, che ne avean prima.*

* §. 136. *Cor. II.* Laonde se il corpo B sia quiescente; dopo dell' urto l' incorrente A resterà in quiete, e 'l corpo B muoverassi colla velocità del corpo A e per la medesima direzione di esso.

* §. 137. *Cor. III.* Se $mV - 2mv$ sia maggiore di MV, sarà negativo il fratto $\frac{MV + 2mv - mV}{M + m}$, che ne dinota la velocità del corpo A dopo dell' urto. Dunque in tal caso il corpo A dopo dell' urto dovrà risaltare per la parte opposta. Ma qualora $mV - 2mv$ supera MV, sta $m : M$ in maggior ragione di $V : V - 2v$. Dunque *affinchè il corpo A dopo dell' urto risalti per la parte opposta, dee stare la massa del corpo B a quella di A in maggior ragione della velocità di A a questa velocità diminuita della doppia velocità del corpo B.*

PROP. XXVI. PROBL.

* §. 138. *Date le velocità e le masse di due corpi elastici A e B, che scambievol-*

mente s' incontrino ; ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.

Sol. Si facciano le medesime indicazioni de' prec. Problemi. Egli è chiaro, che se nel momento dell' urto i corpi A e B si considerino come inerti, dovrà essere la quantità di moto del corpo A dopo dell' urto uguale ad $\frac{MV-mv}{M+m}$. M, e quella del corpo B uguale ad $\frac{MV-mv}{M+m}$. m. Dunque essendo MV la quantità di moto del corpo A prima dell' urto, dev' essere la forza, colla quale ciascuno dei due corpi considerati come inerti all' altro imprime nell' atto dell'urto, uguale ad $MV-\frac{MMV-Mmv}{M+m}$, cioè ad $\frac{MmV+Mmv}{M+m}$, ed a questa espressione sarà pure uguale la forza, colla quale i proposti corpi A e B dopo dell' urto cercano di riacquistare le loro primitive figure. Per la qual cosa essendo $\frac{MMV-Mmv}{M+m}$ la quantità di moto, che il corpo A considerato come inerte avrebbe dopo dell' urto, ed $\frac{MmV+Mmv}{M+m}$ quella, che dal riprendere la primitiva figura si toglie alla precedente quantità di moto; dovrà essere la differenza di queste espressioni uguale alla quantità di moto del corpo A dopo dell' urto come elastico; cioè tal quantità di moto sarà uguale ad

$$\frac{MMV-2Mmv-MmV}{M+m}$$

Similmente aggiungendosi alla quantità di moto $\frac{MmV - mmv}{M+m}$ del corpo B come inerte la quantità di moto, che nasce dallo spiegamento delle parti di esso fatto per la medesima direzione di quel movimento, che prenderebbe se fosse inerte, si avrà la quantità del corpo B, considerato come elastico, uguale a

$$\frac{2MmV + Mmv - mmv}{M+m} \ldots \text{C. B. F.}$$

* §. 139. *Cor. I.* Suppongasi $M=m$. Sarà la quantità di moto del corpo A dopo dell' urto uguale a $-Mv$, e quella del corpo B uguale ad MV. Dunque le velocità di questi corpi dopo dell' urto dovranno essere rispettivamente uguali a $-v$, e V. Vale a dire, *se due corpi elastici di uguali masse scambievolmente s' incontrino; essi dopo dell' urto dovranno risaltare con iscambiarsi le velocità, che avean prima.*

* §. 140. *Cor. II.* Sieno le masse M ed m dei proposti corpi nella ragione inversa delle velocità V e v. Dovrà essere $MV=mv$. E quindi la quantità di moto del corpo A dopo dell' urto ne sarà dinotata da

$$-\frac{Mmv + mmv}{M+m}; \text{ cioè da } -MV \text{ ; e quella}$$

del corpo B da $\frac{MmV + Mmv}{M+m}$, o sia da mv. Dunque *se le masse di due corpi elastici, che scambievolmente s' incontrino, sieno inversamente come le loro velocità; dopo dell' urto dovranno discostarsi l' un l' altro colle medesime velocità, onde prima si erano accostati.*

PROP. XXVII. PROBL.

* §. 141. *Ridurre l' urto obbliquo di due corpi all' urto diretto.*

Sol. I due corpi (fig. 13.) C e K, di cui le masse sieno M ed *m*, partendosi dai luoghi A ed H per le direzioni AC, HK colle velocità C e c rispettivamente, si percuotono obbliquamente in L; si vuol ridurre quest' urto al diretto, affinchè si possano determinare le velocità e le direzioni di essi dopo dell' urto.

Si congiunga la CK, e pel punto C nel piano ACK si distenda la CD perpendicolare a CK, e per K nel piano HKC si tiri pure la KM perpendicolare a CK. Di poi dai punti A ed H si menino le AD, HM perpendicolari a CD, KM rispettivamente, e si compiano i rettangoli ADCB, HMKN. Finalmente si ponga l' angolo CAD$=h$, e l' angolo KHM$=k$. Sarà la forza AC$=$M.C, e l' altra HK$=m.c$. Onde se la forza AC si risolva nelle due CD, CB, e l' altra HK nelle due KM, KN; sarà CD$=$M.C.sen.h, BC$=$M.C.cos.h, KM$=mc$.sen.k, e KN$=mc$.cos.k, Ma le forze CD, KM non producono alcun effetto nell' atto dell' urto, e le forze CB, KN sono quelle, colle quali incontransi i corpi C e K. Dunque se CG e KO ne dinotino le rispettive quantità di moto dei corpi C e K dopo dell' urto diretto, e si prolunghino le DC, MK verso E e Q, tal che sia CE$=$CD, e KQ$=$KM, e si compiscano i rettangoli CEFG, KQPO, le diagonali CF, KP di questi saranno come le quantità di moto dei corpi C e K dopo dell' urto C. B. F.

CAP. IX.

GENERALI CONSIDERAZIONI SULLE FORZE CENTRIPETE, E DELLA GRAVITA' TERRESTRE.

PROP. XXVIII. TEOR.

§. 142. *L'energie di qualunque virtù, che da un punto si diffonde in direzioni rettilinee, in due differenti luoghi sono nella ragione inversa dei quadrati delle distanze di esso punto da quei luoghi.*

Dim. Sia (fig. 14.) P quel punto, dal quale si diffonda in direzioni rettilinee una certa virtù, e si concepiscano descritte le due sfere AB, CD, che abbiano il punto P per centro comune. Dico, che l'energia della virtù diffusa dal punto P nel luogo D stia all'energia della stessa virtù nel luogo B, come il quadrato di PB a quello di PD.

Poichè la virtù, che dal punto P si diffonde in direzioni rettilinee ne investe ugualmente tanto le parti della superficie sferica AB, che quelle della superficie sferica CD. Ma la superficie sferica AB è maggiore dell'altra CD. Dunque la virtù, che dal punto P si diffonde, dev' essere tanto più concentrata nella superficie sferica CD, che nell' altra AB, per quanto questa seconda superficie contiene la prima. Ma la superficie sferica AB sta all' altra CD, come il quadrato di PB a quello di PD. Dunque l'energia della virtù diffusa dal punto P nel luogo D sta all'energia della stessa virtù nel luogo B, come il quadrato di PB a quello di PD. C. B. D.

§. 143. *Cor. I.* Adunque se da un punto si diffonda in direzioni rettilinee una certa virtù di attirare i corpi; l' energie di tal virtù in due differenti luoghi saranno tra se nella ragione inversa dei quadrati delle distanze di esso punto da quei luoghi.

§. 144. *Cor II.* E poichè tutti i corpi della nostra Terra a qualunque altezza si elevino, tosto che son lasciati cadono di bel nuovo sulla superficie terrestre per direzioni ad essa perpendicolari; l'è chiaro, che dal centro della Terra (§. 54, e 69.) si debba diffondere in direzioni rettilinee una certa virtù di attirare i corpi, che gli sono intorno.

§. 145. *Cor. III.* Il perchè essendo picciolissime le altezze, cui possiamo innalzare i corpi dalla superficie della Terra rispetto al raggio della stessa Terra; si potranno aver per uguali i quadrati del raggio terrestre, e di questo raggio aumentato della massima altezza, cui possiamo far ascendere i gravi. Dunque I.° *debbono aversi per uguali le forze, onde verso il centro della Terra ne viene spinto un corpo, ora posto in un luogo qualunque della superficie terrestre, ed ora posto sulla vetta di un alto monte, che quivi si erige, o nella parte più bassa di una profonda valle, che ivi si ritrovi.* II.° *Debbono aversi di uguali energie le spinte, che in ciascun istante del suo movimento riceve un corpo, il quale discende sulla superficie terrestre da un' altezza qualunque, cui siasi elevato, o pur che ne sia spinto in sù per una direzione perpendicolare alla superficie terrestre.*

§. 146. *Cor. IV.* E poichè spinte uguali ge-

nerano uguali gradi di velocità in un medesimo corpo (§. 58.); l'è chiaro, I.° che il *movimento di un corpo, che nelle vicinanze di nostra Terra si fa liberamente discendere dalle quiete debba essere uniformemente accelerato*, II.° *e che debba essere uniformemente ritardato il movimento di un corpo, che ne sia spinto in su verticalmente*, supposto che in ciascuno di questi casi sia tolta la resistenza, che l'aria oppone al movimento del corpo.

§. 147. *Cor. V*. Dunque tutto ciò che relativamente ai moti uniformemente accelerato ed uniformemente ritardato fu dimostrato nel Cap. III. si può convenevolmente applicare ai movimenti dei corpi, che nelle vicinanze di nostra Terra si lasciano discendere dalla quiete, ed a quelli dei corpi, che ne sono spinti in su verticalmente, supposto tolta la resistenza dell'aria.

§. 148. *Cor. VI*. E poichè dalle sperienze accuratamente istituite in Parigi si è rilevato, che un corpo, il quale nelle vicinanze di nostra Terra si lasci nel vuoto cadere dalla quiete, percorre uno spazio di $15^{pi.}, 1$. nel primo minuto secondo; l'è chiaro, che se con v si dinoti la velocità, che esso corpo si acquista dopo averne percorso lo spazio di $15^{pi.}, 1$, e per a si dinoti un'altra qualunque altezza, dovrà stare (§. 45.) $\sqrt{15^{pi.}, 1} : \sqrt{a} :: v : v \sqrt{\left(\frac{a}{15^{pi.}1}\right)}$. Ma v dinota lo spazio (§. 27.), che in un secondo di tempo il proposto corpo ne percorrerebbe equabilmente colla velocità da esso acquistata dopo essere disceso nel vuoto per lo spazio di $15^{pi.}, 1$. Dunque dev'essere (§. 46.)

$v = 30^{pi.}, 2$. Il perchè la velocità $v\sqrt{\frac{a}{15^{pi.}, 1}}$, che si acquisterebbe il corpo discendendo dalla quiete nel vuoto dall'altezza a, dovrà pareggiare $30^{pi.}, 2\sqrt{\frac{a}{15^{pi.}, 1}}$; cioè $2\sqrt{15^{pi.}, 1.\ a}$.

§. 149. *Cor. VII.* E poichè nel discendere un corpo dalla quiete nelle vicinanze di nostra Terra la velocità di esso in uguali tempuscoli si accresce di uguali quantità, per cagione delle spinte uguali, che esso riceve verso il centro della Terra; l'è chiaro, che qualora quel corpo n'è spinto da una forza qualunque la velocità di esso debba diminuire di quantità uguali nei medesimi uguali tempuscoli, finchè ne resti annullata l'intiera velocità, che ad esso s'impresse. Ma questa medesima velocità il corpo si acquisterebbe calando dalla quiete dal punto, ov'è salito, insino a quello, da cui n'è stato spinto. Dunque *se un corpo si lasci liberamente discendere da una qualunque altezza, esso dovrà tanta velocità acquistarsi, che con altrettanta sospintone verticalmente potrà montare alla medesima altezza.*

§. 150. *Def. XLI.* Quella forza continua, che investendo un corpo il fa tendere sempre ad un dato punto, chiamasi *gravità* o *forza centripeta.* Esso corpo si dice *grave*, e 'l punto, ove ne tende, appellasi *centro delle forze*, o semplicemente di lui centro.

§. 151. *Scol.* Cotesta tendenza dei gravi o consiste nella loro discesa verso del centro, o nel conato di discendervi. La prima si appalesa

in quei gravi, che si lasciano cadere liberamente, nè son poi dai corpi stranieri nel loro cammino impediti, e la seconda in quegli altri si sperimenta, che son ritenuti da ostacoli invincibili. Così la gravità terrestre, che l'è una specie di tali forze, obbliga un grave a calar giù verticalmente. Ella fa che un altro grave prema quel piano su cui poggia, o che tenda quel filo, da cui è sospeso.

§. 152. *Def. XLII.* Una forza centripeta si dirà *uniforme*, se colla stessa energia ella ne investa un dato grave a qualunque distanza dal di lui centro. E si dirà poi *variabile*, se la divisata energia si muti al cangiarsi della distanza di un grave dal di lui centro.

§. 153. *Cor.* A rigore niuna forza centripeta può essere uniforme (§. 142.); ma tale può considerarsi in uno spazio infinitesimo trascorsone dal grave.

§. 154. *Def. XLIII. Legge di una forza centripeta* è quella funzione della distanza di un corpo dal centro delle forze, cui n'è proporzionale la gravità di esso.

§. 155. *Scol.* Così crescendo la gravità di un corpo come la distanza, che esso serba dal centro delle forze, *la ragione di queste distanze* si dirà legge della forza centripeta. E se la gravità si minori come ne cresce il quadrato della distanza di un corpo dal di lui centro, *la ragione inversa duplicata delle distanze* sarà in tal caso la legge della forza centripeta.

§. 156. *Def. XLIV.* La curva (fig. 2.) APQD dirassi *scala delle gravità, o delle forze centripete*, se il di lei asse AX passi per lo centro delle forze, e le ordinate MP, NQ, BD,

ec. sieno come le gravità di uno stesso corpo posto nei luoghi M, N, B, ec.

§. 157. *Def. XLV.* La tendenza dell' intiero grave al centro delle forze chiamasi *peso* del corpo: e dal Newton suol dirsi *quantità motrice della forza centripeta.*

§. 158. *Cor. I.* Il peso di un corpo si valuta da quella forza, onde se ne impedisce la discesa di esso verso del centro.

§. 159. *Cor. II.* Il peso di un corpo, ch' è la somma dei conati, onde ciascuno de' di lui elementi vuol irne al centro, convien che si valuti dal numero di cotesti elementi e dalla tendenza di ciascheduno. Ma il numero degli elementi di un corpo adegua la massa di esso. Dunque *il peso di un corpo adegua la massa di esso multiplicata per la tendenza di un suo elemento verso del centro.*

§. 160. *Cor. III.* Il perchè i pesi di due corpi, posti ad uguali distanze da un centro di forze debbono essere proporzionali alle masse di essi.

§. 161. *Cor. IV.* Sebbene ignoriamo la cagione della gravità terrestre, e 'l modo, ond'essa agisce nei corpi; si sa non di meno, che debba investirne non solo l' esterne di loro parti, ma le interne ancora. Poichè se in quelle sol ne agisse dovrebbe cangiarsi il peso di un corpo al cangiarsi della di lui superficie. Il che ripugna ad una continuata esperienza.

§. 162. *Cor. V.* E poichè le uguali particelle di un corpo ne sono spinte con forze uguali verso il centro della Terra, e la distanza di due qualunque particelle di quel corpo è picciolissima rispetto al raggio terrestre; perciò

può supporsi, che le direzioni di quelle forze, onde le particelle di un corpo qualunque ne tendono al centro della Terra, sieno tra se parallele, e quindi il centro di tali forze parallele sarà sempre lo stesso (§. 97.), qualunque sia la posizione del corpo rispetto ad un piano orizzontale.

§. 163. *Scol.* Se nel vuoto boileano si facciano cadere più gravi comunque differenti nella massa, nel volume, nella densità, ec., ed ancorchè uno di essi sia una levissima piuma, ed un altro una palla di oro ponderosa, si vedranno tutti discendere (come avealo presagito il Galilei) in tempi uguali da uguali altezze. Dunque le velocità finali di questi corpi dovranno uguagliarsi, ed i pesi loro, che come altrettante potenze continue le han prodotte, saranno proporzionali alle masse (§. 58.).

§. 164. *Def. XLVI.* La tendenza di ciascun elemento di un grave al centro delle forze dicesi *quantità acceleratrice della forza centripeta.*

§. 165. *Cor. I.* Dunque la quantità motrice della forza centripeta è il prodotto della massa di un corpo nella quantità acceleratrice della stessa forza.

§. 166. *Cor. II.* Due uguali elementi di materia posti a disceguali distanze dal centro delle forze, se quivi si facciano liberamente cadere dovranno alla fine di uno stesso tempuscolo concepir due gradi di velocità alle loro tendenze proporzionali (§. 58.), o alle quantità acceleratrici della forza centripeta. Dunque *la quantità acceleratrice della forza centripeta è proporzionale a quel grado di velocità, che*

in un dato tempuscolo si acquista un elemento di materia liberamente calando verso del centro.

§. 167. *Cor. III.* E poichè dopo uno stesso tempuscolo tanta velocità si acquista un semplice elemento di materia, quanto un qualunque grave, questo però dal suo peso animato al moto, e quello dal suo conato (§. 59.); sarà anche vero, che la misura della quantità acceleratrice della forza centripeta sia la velocità, che in un dato tempuscolo si produce in un qualunque grave liberamente scendendo verso del centro.

§. 168. *Def. XLVII.* La *quantità assoluta* della forza centripeta è il peso di un dato corpo posto ad una data distanza da un centro delle forze.

. 169. *Cor.* Dunque se i pesi di due corpi uguali, ed ugualmente distanti da due centri, sieno tra se come $m : n$; questa medesima ragione dovranno serbarsi le quantità assolute degli stessi centri.

CAP. X.

DEI RAPPORTI DELLE FORZE CENTRIPETE NEI MOVIMENTI DEI GRAVI.

§. 170. *Def. XLVIII.* Quella forza, che derivando dalla centripeta, impiegasi solamente ad accelerare un grave nel suo cammino, o a ritardarnelo, dicesi *forza acceleratrice*, o *ritardatrice*.

§. 171. *Cor.* L' energia della forza acceleratrice dev' essere proporzionale alla velocità generata in un dato tempuscolo.

§. 172. *Def. XLIX.* La forza acceleratrice di un corpo si dirà *uniforme*, se esso per una certa direzione, e colla stessa energia n' è sempre animato al moto, ovunque si ritrovi nel suo sentiere.

PROP. XXIX. TEOR.

§. 173. *Le velocità, che si producono in più corpi uniformemente accelerati da altrettante forze, sono come l' energie di queste, e come i tempi, in che quelle si son prodotte.*

Dim. Poichè la quantità motrice della forza centripeta è proporzionale (§. 167.) a quel grado di velocità, che in un dato tempuscolo si genera in un qualunque grave liberamente scendendo verso del centro; l' è chiaro, che in un dato tempo la velocità generata in un corpo uniformemente accelerato da una forza sia come l' energia di tal forza, e come il tempo, in che quella si è generata. Dunque le velocità, che si producono in più corpi uniformemente accelerati da altrettante forze, debbono essere come l' energie di queste, e come i tempi, in che quelle si son prodotte. C. B. D.

§. 174. *Cor.* La perdita di velocità, che fa un mobile uniformemente ritardato da una qualunque forza, l' è anche proporzionale all' energia di essa forza ed al tempo. Dunque le velocità, che si distruggono in più corpi uniformemente ritardati da altrettante forze, sono come l' energie di queste, e come i tempi, in che quelle si son distrutte.

PROP. XXX. TEOR.

§. 175. *Se due corpi ne sieno uniformemente accelerati da due forze; gli spazii, che essi corpi descrivono dal principio del loro moto, sono nella semplice ragione delle forze acceleratrici, e nella duplicata dei tempi.*

E gli stessi spazii sono pure nella duplicata ragion diretta delle velocità finali, e nell' inversa delle forze.

Dim. Par. I. Le rette (fig. 15.) AE, AC dinotino i tempi, ne' quali muovansi due corpi, uno dalla forza AP uniformemente accelerato, e l' altro dalla AQ. Nella retta FD, che per E si distende perpendicolare a CA, si prendano le parti FE, ED proporzionali alle velocità dagli stessi corpi acquistate alla fine del tempo AE, le quali dovranno essere (§. 173.) nella ragione delle forze AP, AQ: ed unite le rette AF, AD si prolunghi la AD, sinchè incontri la CB perpendicolarmente elevata alla retta AC dal punto estremo C.

Ciò posto. Si tirino ovunque le rette *bq*, *cf*, ec. perpendicolari alla AC, saranno le rette FE, *cd*, *ba*, ec. come le altre AE, A*d*, A*a*, ec. Dunque siccome per FE dinotasi la velocità dal primo corpo acquistata alla fine del tempo AE, così le altre *cd*, *ba*, ec. dovranno esprimere quelle velocità, ond' ei si muove alla fine dei tempi A*d*, A*a*, ec. E quindi lo spazio (§.47.) trascorso dallo stesso mobile nel tempo AE sarà rappresentato dal triangolo AFE. In simil guisa può dimostrarsi, che l' altro mobile uniformemente accelerato dalla forza AQ debba percorrerne nel tempo AC uno spazio dall' altro trian-

golo ACB disegnato. E poichè il triangolo AEF sta all' altro ACB' in ragion composta di AEF ad AED, e di AED ad ACB: ed è la prima di queste ragioni componenti uguale a quella di FE ad ED, cioè alla ragione delle forze acceleratrici, e l' altra dei triangoli simili AED, ACB uguaglia la ragione dei quadrati dei lati omologhi AE, AC, o dei tempi, che dalle rette AE, AC son disegnati. Dunque gli spazii descritti dai proposti corpi dal principio del moto sono come le forze acceleratrici, e come i quadrati dei tempi.

Par. I. I triangoli AEF, ACB sono in ragion composta delle loro basi EF, CB, e delle altezze AE, AC, o delle ED, CB, che ad esse sono proporzionali. Ma l' è poi ED : CB :: (ED: EF) (EF : CB). Dunque sarà AEF : ACB :: (EF : CB) (ED : EF) (EF : CB); cioè a dire AEF : ACB:: (EF^2 CB^2) (ED : EF). E quindi gli spazii descritti nei tempi AE, AC sono direttamente come i quadrati delle velocità finali, ed inversamente come le forze acceleratrici. C. B. D.

§. 176. *Cor. I.* Dunque se con S ed s si dinotino gli spazii descritti da due corpi, che partendo dalla quiete ne sieno uniformemente accelerati dalle forze F ed f, e sieno T e t i tempi, nei quali durano i movimenti di essi, e V e v le velocità degli stessi corpi in fine dei medesimi tempi; dovrà essere, per la Par. I del precedente Teorema, $S : s :: (F : f) (T^2 : t^2)$, e per la Par. II, $S : s :: (V^2 : v^2) (f : F)$.

§. 177. *Cor. II.* Il perchè se pongasi $s=1$, $f=1$, $t=1$, e $v=1$; dovrà stare $S:1::(F:1)(T^2:1)$ ed $S:1::(V^2:1)(1:F)$; cioè $S:1::FT^2:1$, ed

$S:1::V^2:F$. Dunque dev' essere

$$S = FT^2, \quad \text{ed} \quad S = \frac{[\text{illegible}]}{V}.$$

E quindi si ha $F = \frac{S}{T^2}$, ovvero $F = \frac{V^2}{S}$.

Vale a dire, che *il valore di una forza acceleratrice potrà dinotarsi dallo spazio diviso pel quadrato del tempo, o dal quadrato della velocità finale diviso per lo spazio.*

§. 178. *Cor. III.* Se due gravi si facciano cadere liberamente in due diverse regioni della Terra, le altezze percorse saranno come i quadrati dei tempi, e come le forze, che quivi gli accelerano.

§. 179. *Scol.* Una forza acceleratrice comunque variabile nella di lei energia, può concepirsi, che animi *uniformemente* il mobile nel condurlo per uno spazietto infinitesimo, o descritto in un tempo infinitesimo. Dunque tutto ciò, che si è mostrato nelle due ultime Proposizioni, e nei loro Corollarii, può convenevolmente adattarsi agli spazietti iniziali (*a*), ed ai tempi infinitesimi, senza che faccia uopo dimostrarvelo di bel nuovo.

(*a*) Gli spazietti iniziali sono que' spazietti infinitesimi, che dai gravi si descrivono in sul principio de' loro movimenti.

PROP. XXXI. PROBL.

§. 180. *Esibire l' equazioni generali del moto variabile prodotto da una forza acceleratrice, o ritardatrice, qualunque essa ne sia.*

Sol. E poichè la forza acceleratrice o ritardatrice costante F di un corpo, che nel tempo T percorre lo spazio S, alla fine del quale trovasi avere la velocità V, n' è rappresentata (§.177.) tanto da $\frac{S}{T^2}$, che da $\frac{V^2}{S}$; l' è chiaro, che debba essere S uguale tanto ad FT^2, che a $\frac{V^2}{F}$; e perciò dev' essere $FT^2 = \frac{V^2}{F}$, ed $FT = V$.

Ma in un tempuscolo infinitesimo dT la forza acceleratrice o ritardatrice variabile, si può supporre costante (§. 153.), ed in tal tempuscolo la velocità acquistata o perduta dal corpo è un elemento di quella, che esso avea nel principio del tempo dT. Dunque dev' essere

$$FdT = \pm dV \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

In oltre nel tempuscolo dT si può supporre, che il corpo ne descriva equabilmente lo spazietto dS colla velocità V; perciò dev' essere (§. 33. n.° 2.°).

$$dT = \frac{dS}{V}.$$

Dunque sostituendo nell' equazione (1) $\frac{dS}{V}$ in luogo di dT, ne dovrà risultare

$$\frac{FdS}{V} = \pm dV; \text{ cioè } FdS = \pm VdV \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Finalmente essendo $V = \frac{dS}{dT}$, supponendo dT costante, dev' essere pure $dV = \frac{d^2S}{dT^2}$. E quindi sostituendo questo valore di dV nell' equazione (1), si avrà

$FdT = \pm \frac{d^2S}{dT}$, ovvero $FdT^2 = \pm d^2S$. . . (3).

§. 181. *Cor.* Se la forza acceleratrice o ritardatrice F sia costante, come avviene nelle vicinanze di nostra Terra, integrando l' equazione (1) del precedente Problema, si ottiene

$FT = \pm V + C$. . . . (4),

ed integrando l' equazione (2) si ha

$FS = \pm \frac{1}{2} V^2 + C'$. . . (5).

Dunque se un corpo si fa discendere liberamente dalla quiete nelle vicinanze di nostra Terra, dev' essere

$FT = V$. . . . . (6), ed $FS = \frac{1}{2} V^2$. . . . (7).

Il perchè in tal caso dev' essere anche

$V^2 = 2FS$. . . . (8), e $V = \sqrt{2FS}$. . . . (9).

C A P. XI.

DELLA LIBERA DISCESA DEI GRAVI PER PIANI DECLIVI.

§. 182. *Def. L. Piano inclinato*, *obbliquo*, o *declive* dicesi quello, che non è posto verticalmente, nè in sito orizzontale. E chiamasi

obbliquità di un tal piano l' angolo, che ne misura la sua inclinazione all' orizzonte.

§. 183. *Def. LI.* Per la retta PN perpendicolare al piano inclinato QC (fig. 16.) conducasi il piano verticale TPN ; la comune sezione TP di questo piano e di quello dirassi *lunghezza del piano inclinato.*

PROP. XXXII. TEOR.

§. 184. *Un grave posto sopra un piano inclinato cerca di scendere per la lunghezza di esso con una forza, che sta al suo peso nella ragione del seno dell' obbliquità del piano al raggio.*

Dim. Il peso del corpo P, ch' è sul piano inclinato QC, esprimasi dalla retta verticale PL condotta pel luogo, ove quello ne giace, e sopra la PN perpendicolare allo stesso piano si cali dal punto L la perpendicolare LN, e poi si compia il parallelogrammo PMLN. Finalmente si protraggono le due rette PM, PL finchè incontrino il piano orizzontale AC nei punti T ed O, e si unisca la retta TO.

E poichè il piano QC è perpendicolare al piano verticale (18. El. XI.) TPO, ed allo stesso piano l' è anche perpendicolare (18. El. XI.) il piano orizzontale AC, la retta CT, ch' è comune sezione dei piani QC, AC, sarà perpendicolare al piano verticale TPO (19. El. XI.) Il perchè dev' essere retto tanto l' angolo CTP, che l' altro CTO, e l' angolo PTO sarà la misura dell' inclinazione del piano QC all'altro ABC (Def. VI. El. XI.), cioè l' obbliquità dello stesso piano QC.

E poichè il peso del corpo P n' è dinotato da PL, e la forza PL si risolve nelle due PN, PM, di cui la prima, perchè perpendicolare al piano QC, dalla fermezza ed immobilità di tal piano n' è distrutta, e l' altra PM giacendo nel piano verticale NPL dev' essere diretta per la lunghezza del piano inclinato QC, e dev' esserne interamente impiegata ad accelerarne il grave P per la lunghezza PT del piano QC. Dunque dee stare il peso del corpo P alla forza, che lo anima a discendere per la lunghezza del piano inclinato QC come PL a PM. Ma essendo tra se uguali gli angoli POT, PML, perchè ciascuno di essi è retto, e l' angolo OPT è comune all' uno ed all' altro dei due triangoli POT, PML, dev' essere l' angolo PLM uguale all' altro PTO, ed il triangolo PML simile all' altro PTO. Onde dee stare PL : PM::PT: PO. Dunque dee stare il peso del corpo P alla forza, che lo anima a discendere per PT come PT a PO, cioè come il raggio trigonometrico 1 al seno dell' angolo PTO. Il perchè se con P si dinoti il peso del corpo P, con F la forza, che lo spinge per PT, e con φ l' obbliquità del piano QC, o sia l' angolo PTO, dovrà stare P:F::1: sen.φ. C. B. D.

§. 185. *Cor. I.* Essendo P:F::1: sen. φ, dev' essere F=P sen. φ. Dunque se un corpo si lasci discendere per un piano inclinato, il quale sia fermo ed immobile, ed incapace di aggirarsi o di rinculare; la forza, che all' ingiù ne spinge cotesto corpo, essendo uguale al peso di esso multiplicato pel seno dell' obbliquità del piano, dovrà essere uniforme, e 'l movimento del corpo sarà uniformemente accelerato (§.146.).

§. 186. *Cor. II.* Dunque le principali affezioni di questo moto, che furono esposte ne' §§. 42, 45, 46, e 48, converranno alla discesa di un corpo sopra un piano declive fermo ed immobile, ed ove si prescinda dalla resistenza dell' aria, e dallo stropicciamento del globo col piano.

* §. 187. *Cor. III.* Sieno P e P' i pesi di due corpi di masse uguali posti sopra due piani, le cui inclinazioni all' orizzonte sieno Φ, e φ; saranno le forze, onde que' corpi ne sono spinti all'ingiù per le lunghezze de' piani, rispettivamente uguali a P sen.Φ, e P' sen. φ. Ma per esserne uguali le masse di que' corpi, l' è pure P uguale a P'. Dunque *le forze, onde due corpi di uguali masse posti sopra due piani cercano di scendere per le lunghezze di questi, sono proporzionali ai seni delle rispettive obbliquità di que' piani.*

* §. 188. *Cor. IV.* Or la forza, onde il secondo di detti corpi ne scende per la lunghezza del piano inclinato, sta alla forza, onde un altro corpo, di cui *p* ne sia il peso, cerca di scendere per la lunghezza del medesimo piano nella ragione di P' sen.φ : *p* sen. φ, cioè nella ragione di P':*p*, e questa ragione è uguale a quella delle masse (§.160.). Dunque le velocità generate da quelle forze acceleratrici alla fine di tempi uguali debbono essere uguali. Il perchè *le velocità, che si acquistano due corpi posti sopra due piani inclinati alla fine di tempi uguali, sono nella ragione dei seni delle obbliquità di que' piani.*

PROP. XXXIII. TEOR.

* §. 189. *Se dalla cima di un piano inclinato si facciano discendere due gravi, uno verticalmente, e l' altro per la lunghezza del piano; gli spazii, che essi descriveranno dopo un dato tempo, saranno tra se nella ragione del raggio al seno dell' obbliquità del piano. Ed in questa stessa ragione saranno pure le rispettive velocità finali dei medesimi gravi.*

Dim. Sieno P e *p* i pesi dei proposti corpi, il primo dei quali si lasci discendere verticalmente, e 'l secondo per la lunghezza di un piano, che inclinasi all' orizzonte sotto l' angolo Φ. Dovrà essere (§. 188.) la velocità, che in un certo tempo si acquista dal primo, a quella, che si acquista dal secondo, nella ragione di sen. 90° a sen. Φ, o di 1:sen. Φ, e nella medesima ragione saranno gli spazii (§.49. n. 1.°) da essi corpi descritti in tempi uguali. C. B. D.

* §. 190. *Cor. I.* Sieno (fig. 17.) AB, AM gli spazii contemporaneamente descritti da due gravi, che partendo dalla cima del piano inclinato AC si conducano uno per l' altezza AB, e l' altro per la sua lunghezza AC. Dal punto B si elevi alla BA la perpendicolare BC nel piano BAC, e si congiunga la BM. Sarà AB ad AM come la velocità, che in un certo tempo si acquista il corpo, che scende verticalmente, a quella, che si acquista quell' altro, che cala pel piano inclinato AC, cioè come il raggio al seno dell' angolo ACB, val quanto dire come AC ad AB. Dunque i due triangoli ABC, ABM, che hanno l' angolo BAC di comune, ed i lati BA ed AC proporzionali ai lati AM ed AB,

saranno tra se equiangoli: onde l' angolo AMB sarà retto al par del suo uguale ABC.

* §. 191. *Cor. II.* Dunque la retta BM, che unisce gli estremi B ed M degli spazii AB, AM descritti in tempi uguali, e dal grave, che cala verticalmente, e da quell'altro, che discende pel piano obbliquo AC, l'è perpendicolare al medesimo piano.

* §. 192. *Cor. III.* E se più corpi si facciano cadere per diversi piani obbliqui; gli spazii, che essi descriveranno in tempi uguali, saranno come le loro velocità finali, cioè come i seni delle obbliquità de' piani (§. 188.).

PROP. XXXIV. TEOR.

* §. 193. *Se due gravi A ed a si facciano insieme cadere dalla cima di un piano inclinato* AC, *questo però verticalmente, quello per la lunghezza del piano; essi giungeranno all' orizzonte con velocità uguali, ed i tempi delle loro discese saranno come gli spazii percorsi.*

Dim. Sia φ l'obbliquità del piano AC all' orizzonte CB, e si ponga l' altezza AB del piano AC uguale ad a, e la lunghezza AC di esso uguale ad l, e si dinotino con V e v le velocità finali dei proposti corpi. Dovrà stare (§. 188.) 1 : sen. φ come la forza acceleratrice del corpo, che discende per l'altezza a, a quella del corpo, che discende per la lunghezza l dello stesso piano. Ma gli spazii a ed l percorsi da que' due corpi (§. 175.) sono in ragion composta di $V^2 : v^2$, e di sen. $\varphi : 1$; cioè nella ragione di V^2 sen. $\varphi : v^2$. Dunque

dev' essere

$$l V^2 \text{sen.}\varphi = a v^2;$$

e quindi dee stare $V^2 : v^2 :: a : l \text{ sen.}\varphi$. Dunque dev' essere $V^2 = v^2$, e $V = v$. In oltre se con T e t si dinotino i rispettivi tempi, in che il primo dei proposti corpi ne discende per l' altezza, e l' altro per la lunghezza del piano, dovrà stare (§. 175.) $a : l :: (1 : \text{sen.}\ \varphi)(T^2 : t^2) :: T^2 : t^2 \text{ sen.}\varphi$. Onde dev' essere

$$a\, t^2 \text{ sen.}\ \varphi = l\, T^2;$$

e quindi dee stare $T^2 : t^2 :: a \text{ sen.}\varphi : l$. Ma l' altezza del piano inclinato pareggia l sen.φ. Dunque dee stare $T^2 : t^2 :: l \text{ sen.}^2 \varphi : l :: \text{sen.}^2 \varphi : 1$, e $T : t :: \text{sen.}\ \varphi : 1$, cioè $T : t :: a : l$. C. B. D.

* §. 194. *Cor.* Dunque i tempi, in che più gravi discendono per altrettanti piani diversamente inclinati all' orizzonte, e dell' istessa altezza, sono come le lunghezze dei piani, che percorrono, e sono tra se uguali le velocità, ond' essi pervengono all' orizzonte.

PROP. XXXV. TEOR.

* §. 195. *Se vi sieno due piani contigui diversamente inclinati all' orizzonte; la velocità, che acquistasi da un grave in calando pel piano superiore, sta a quella con cui entra nell' inferiore, come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione dei medesimi piani.*

Dim. Le rette (fig. 18.) NB, BC dinotino le lunghezze dei piani contigui, per cui ne scenda un grave, e l' energia di quella forza, che esso acquista in B, esprimasi dalla NB. Si cali dal

punto N la perpendicolare NM sulla CB prolungata, e si compia il rettangolo BDNM.

Ciò posto. La forza NB equivale alle due BD, BM. Ma di queste la prima direttamente impiegasi contro del piano BC, e per la resistenza di esso si elide interamente. Dunque al grave B nel passare dal piano NB nell' altro BC restagli solo la forza MB. Ma nello stesso corpo le forze sono come le velocità, che vi producono (§. 58.). Dunque la velocità, che acquistasi un grave discendendo per NB, sta a quella con cui entra nel piano BC, come NB a BM, cioè come il raggio al coseno dell' angolo NBM, che misura l' inclinazione NBS dei piani contigui. C. B. D.

* § 196. *Cor. I.* Col centro B ed intervallo BN descrivasi il semicerchio SNC. Sarà SM differenza delle due BN, BM, ed insiem senoverso dell' arco NS, o dell' angolo NBM. Dunque la velocità, che perde il grave B passando dal piano NB nell' altro BC, sta alla velocità acquistatasi nella discesa per NB, come il senoverso dell' inclinazione dei piani contigui al raggio.

* § 197. *Cor. II.* Sia l' angolo NBS minore di qualunque acuto rettilineo (qual' è per appunto quello, che forma ogni elemento di una curva colla sua tangente), e si congiungano le NS, NC. Sarà retto l' angolo SNC, perchè nel semicerchio, e con ciò (8 El. VI) SM:SN::SN:SC. Ma l' archetto NS è infinitesimo per rapporto alla semicirconferenza. Dunque la corda NS di esso arco dev' essere infinitesima per rapporto al diametro SC, ed SM infinitesima per rapporto ad SN. Il perchè la SM dev' essere infinitesima di secondo ordine relativamente ad SC.

* §. 198. *Cor. III.* Dunque *il grave* B *passando dal piano* NB *nel contiguo* BC *non soffre sensibile perdita di velocità, quando sieno questi piani tra se inclinati ad angolo acutissimo.*

PROP. XXXVI. TEOR.

* §. 199. *Sia* (*fig.* 19.) ABCDE *una curva piana verticalmente disposta, e colla concavità in sù. Dico, che la velocità finale di un grave, che vi si lasci liberamente discendere dentro debbasi all' altezza dell' arco.*

Dim. Sieno AB, BC, CD, DE gli elementi contigui di quella curva, onde col suo proprio peso discende il grave per la di lei parte concava. Pei punti A, C, D, E si distendano le rette orizzontali AF, CQ, DG, EH, e si protraggano gli elementi CB, DC, ED finchè ne incontrino la retta AF nei punti L, K, F, e pei punti L, K, F si menino le rette LQ, KG, FH perpendicolari alle CQ, DG, EH.

E poichè il grave non soffre sensibile perdita di velocità passando dall' elemento AB nell' altro contiguo BC (§. 198.), la velocità, che esso si acquista discendendo per ABC, sarà quanto quella, che gliene verrebbe calando pel solo piano LBC, o per l'altezza LQ di esso. Similmente lo stesso grave entrando nel piano DC non soffre sensibile perdita della velocità, che avea in C, e quindi percorso l' elemento CD troverassi avere in D tanta velocità, quanta ne avrebbe conceputa in D calando pel solo piano KCD, o per l' altezza KG di questo. Dunque continuando in simil guisa cotesto ragionamento, la velocità, che si acquista un grave discen-

dendo per un qualunque arco posto in un piano verticale, è dovuta all' altezza del medesimo arco. C. B. D.

CAP. XII.

DELLA DISCESA DE' GRAVI PER LE CONCAVITA' DI QUELLE CURVE, I CUI ASSI SON POSTI VERTICALMENTE, E DELLA CURVA ISOCRONA NELL' IPOTESI DELLA GRAVITA' COSTANTE.

PROP. XXXVII. TEOR.

* §. 200. *Se un grave si lasci discendere liberamente (fig. 20.) per la curva* BER, *che abbia l' asse* CE *in sito verticale; la forza, che lo accelera in un punto qualunque* B *del suo cammino starà al suo peso, come* BD *semiordinata dell' asse* CE *a* BC *normale della curva in* B.

Dim. Per B conducasi la verticale BF, che rappresenti il peso del corpo B: e tirata per B la retta BA, che tocchi in B la curva BER, si cali dal punto F la retta FA perpendicolare a BA. Sarà l' angolo FBA uguale all' altro DBC; poichè ciascuno di essi insieme coll' angolo ABD forma un angolo retto. Il perchè i due triangoli rettangoli FBA, DBC debbono essere simili, e quindi sarà BA : BF :: BD : BC.

E poichè il peso del corpo B equivale alle due forze laterali AF, AB (§. 81.), e di queste la prima si elide interamente dalla fermezza della curva BER, che si suppone ben rigida ed immobile, l' altra BA ne rimarrà sola ad accelerare il medesimo corpo. Dunque l' energia

di una tal forza acceleratrice sarà al peso del corpo B come BA a BF, cioè come BD a BC. C. B. D.

* §. 201. *Cor. I.* Suppongasi essere un circolo la curva BER. Sarà la mentovata forza acceleratrice al peso del corpo B, come la semiordinata BD al raggio BC. Ma sta il peso del corpo B a quella forza, che lo accelera nell'altro luogo R, come il raggio CR ad RP. Dunque per uguaglianza ordinata saranno le forze, che accelerano il medesimo grave, qualora si ritrova nei luoghi B ed R del circolo BER, come le semiordinate BD, RP di questa curva, cioè come i seni degli archi da descri versi BE, RE.

* §. 202. *Cor. II.* Dunque *se un grave si lasci liberamente cadere nella parte concava della periferia di un cerchio posto in sito verticale; le forze acceleratrici di esso saranno come i seni degli archi, che gli restano a descrivere insino al punto infimo: e quindi in minor ragione dei medesimi archi.*

* §. 203. *Cor. III.* E se la curva (fig. 22) CBA, entro di cui facciasi liberamente discendere il corpo C, sia una cicloide volgare; sarà la forza, che accelera in B il medesimo corpo, al di lui peso, come AO corda corrispondente nel circolo generatore ad AF asse della cicloide: (essendo per la natura di questa curva (Cor. II. Pren. VIII.) il triangolo BQR simile ad AOF). Ed essendo per un simile ragionamento il peso dello stesso corpo alla forza, che lo accelera in D, come FA ad AK; saranno per uguaglianza ordinata le forze acceleratrici di esso grave ne' luoghi B e D, come AO ad AK.

* §. 204. *Cor. IV.* Or le corde AO, AK del circolo generatore sono metà de' corrispondenti archi cicloidali (Cor. III. Pren. VIII) AB, AD; dunque *saranno le forze acceleratrici del grave ne' luoghi* B *e* D *della cicloide* CBA, *entro di cui ne' discende, come gli archi* BA, DA, *che si distendono insino al punto infimo* A.

* §. 205. *Def. LII.* La curva ABC dicesi *Tautocrona*, se un grave nel discendere per gli archi disuguali CA, BA insino al punto infimo A v' impieghi lo stesso tempo.

* §. 206. *Def. LIII.* Cotesta uguaglianza di tempi dicesi *Isocronismo*, il quale si distingue in *semplice*, e *perfetto*. Il primo si verifica quando i tempi totali per le discese CA, BA sono solamente tra se uguali: e l' altro ha luogo quando sieno pure tra se uguali i tempi, onde percorronsi le parti CE, BD proporzionali ai tutti AC, AB.

PROP. XXXVIII. TEOR.

* §. 207. *Nell' ipotesi della gravità costante la cicloide volgare è una curva perfettamente isocrona. Nè vi è altra curva, che sia tale.*

Dim. Par. I. Sia (fig. 22.) ABC la cicloide volgare col vertice A in giù, e coll' asse verticale, e degli archi AC, AB di essa computati dal vertice A si prendano gli archetti CE, BD picciolissimi, ed ai medesimi archi proporzionali. Di poi dai punti C, E, B, D, si tirino all' asse AF le semiordinate CF, EG, BH, DI, e sia K il punto, ove la DI ne incontra la circonfe-

renza del circolo generatore AKF. Si congiunga la KA. Sarà, per la natura della cicloide, KA metà dell' arco AD, e con ciò il quadrato di KA quarta parte di quello di AD. Ma il quadrato di KA pareggia il rettangolo FAI. Dunque dev' essere il rettangolo FAI quarta parte del quadrato di AD. Similmente si dimostra, che il rettangolo FAH è quarta parte del quadrato dell' arco AB, che il rettangolo FAG è quarta parte del quadrato di AE, e che il rettangolo di FA in AF, o sia il quadrato di AF è quarta parte di quello di AC.

Ciò posto. Poichè sta AC : CE :: AB : BD, dovrà stare AC : AE :: AB : AD, e con ciò $AC^2 : AE^2 :: AB^2 : AD^2$. Ma la prima ragione di quest' ultima analogia pareggía quella del quadrato di FA al rettangolo FAG, e la seconda è uguale all' altra del rettangolo FAH al rettangolo FAI. Dunque dee stare FA^2 : FA. AG :: FA. AH : FA. AI; cioè FA : AG :: AH : AI, e convertendo si avrà FA : FG :: AH : HI. Ma per esserne $AC^2 : AB^2 :: CE^2 : BD^2$, ed $AC^2 : AB^2$ :: FA : AH :: FG : HI, dee star pure $CE^2 : BD^2$ :: FG : HI. Onde essendo le FG ed HI come i quadrati delle velocità (§. 193.), che si acquistano due corpi liberamente scendendo per gli archi CE, BD; l' è manifesto dover essere CE: BD come la velocità, che si acquista un grave discendendo per CE, alla velocità, che si acquista un altro grave discendendo per BD; e perciò i tempi, in che quei corpi ne percorrono gli archi CE, BD debbono essere tra sè uguali. Similmente si dimostra, che due qualunque porzioni degli archi AC, AB uguali a CE, BD rispettivamente, e similmente poste nei me-

desimi archi, sono descritte in tempi uguali. Dunque non solo gli archi AC, AB, ma eziandio due porzioni di essi proporzionali ad AC, AB sono descritte in tempi uguali: e perciò nell' ipotesi della gravità costante la cicloide volgare è una curva perfettamente isocrona.

Par. II. Suppongasi, se è possibile, che la curva ABC diversa dalla cicloide volgare sia perfettamente isocrona nell' ipotesi della gravità costante, e sia AP il raggio d' osculo nel punto infimo A della stessa curva. Intanto si divida la PA per metà nel punto F, e sulla FA si descriva il semicerchio FOA. Di poi pel punto F si tiri la semiordinata FC nella detta curva, e degli archi AC, AB si prendano gli elementi CE, BD proporzionali ai tutti, e pei punti E, B, D si ordinino all' asse AF le EG, BH, DI. Sarà il tempo della libera discesa di un grave per l' archetto CE uguale a quello, che lo stesso grave impiegherebbe a discendere per l' archetto BD. Ma quegli archetti si possono concepire descritti con moti uniformemente accelerati, tal che le velocità finali sono quelle, che due gravi si acquisterebbero discendendo liberamente per gli spazietti FG, HI altezze di que' due archetti. Dunque dee stare CE a BD come la velocità, che si acquista un grave discendendo per FG, a quella, che lo stesso grave si acquista discendendo per HI; cioè in sudduplicata ragione di FG ad HI. E quindi dee stare $CE^2 : BD^2 :: FG : HI$. E dimostrando lo stesso per tutti gli altri archetti, in che restano divisi gli archi AC, AB si potrà conchiudere, che sia la somma de' quadrati degli archetti CE contenuti nell' arco AC alla somma dei quadrati

degli archetti BD contenuti nell' arco AB, come la somma di tutte le FG, che si contengono nella FA, alla somma di tutte le HI, che si contengono nella HA. Il perchè dee star pure il quadrato di CE a quello di BD come FA ad HA, o come il quadrato di FA al rettangolo di FA in AH. Ma il rettangolo di FA in AH pareggia il quadrato di AO. Dunque dee stare $CE^2 : BD^2 :: FA^2 : AO^2$. Onde essendo $CE^2 : BD^2 :: AC^2 : AB^2$, sarà pure $AC^2 : AB^2 :: FA^2 : AO^2$. Similmente si dimostra, che prendendo d'accanto al punto infimo A della curva ABC l'archetto AL, che si confonde coll' archetto circolare descritto col centro P ed intervallo PA, debba stare $AL^2 : AC^2 :: AN^2 : AF^2$. Dunque per equalità ordinata dee stare $AL^2 : AB^2 :: AN^2 : AO^2 ::$ $MAF : AO^2$. Ma il rettangolo di MA in AF à quarta parte del rettangolo di MA in 2AP, ed è poi questo rettangolo uguale al quadrato di AL. Dunque dev'essere il quadrato di AO quarta parte di quello di AB, e quindi AO metà AB. Il perchè la curva ABC l'è una cicloide volgare: il che ripugna. Dunque nell' ipotesi ec. C. B. D.

* §. 208. *Def. LIV.* La linea (fig.23) AMB posta verticalmente dicesi *Brachistocrona*, cioè di *celere discesa*, se quivi fattovi liberamente cadere un grave ne pervenga dal luogo A all'altro B in minor tempo, che per qualunque altra linea conterminе ACB.

* 209. §. *Scol.* Quì si richiede, che i punti A e B non giacciano in una stessa retta verticale: poichè in tal caso quella retta, che gli unisce sarebbe la linea Brachistocrona.

PROP. XXXIX. TEOR.

* §. 210. *La cicloide volgare è la curva brachistocrona nell' ipotesi della gravità costante.*

Dim. Sia (fig. 23.) AMB una semicicloide volgare, il cui asse sia posto verticalmente col vertice in giù: io dico, che la discesa libera di un grave per l' arco AB compiasi in meno di tempo, che per l' arco ACB di una qualunque altra linea contermine. Suppongasi, che la retta AL sia la base della cicloide, e prendasi in essa curva l' archetto infinitesimo Mm, e condotte in M ed m le normali MK, mK, che si uniscono in K, si prolunghino fino a che incontrino l' altra linea ACB in C e c. Col centro K intervallo KC si descriva l' archetto circolare Ce, e da' punti C ed M si calino CG, MD perpendicolari su di AL. Sarà NM metà di KM (Cor. IV Pren. VII): onde bisecata la MC in O, sarà eziandio NO metà di KC. E finalmente se prendasi Nf media proporzionale tra NM ed NC; questa (25 El. V) sarà minore di NO, ch' è metà di KC, o ch' è la semisomma di NM ed NC.

Ciò posto. Pe' triangoli simili KMm, KCe sta Mm : Ce :: KM : KC, o come NM ad NO. Ma la ragione di NM ad NO è minore di quella di NM ad Nf, cioè della sudduplicata ragione di NM ad NC, o della sudduplicata di MD a CG (essendo tra se simili i due triangoli NMD, NCG). Dunque sarà Mm:Ce, o alla sua uguale Cc in minor ragione della sudduplicata di DM: GC, cioè della velocità acquistatasi da un grave nella libera discesa per AM a quella, che esso

si acquisterebbe per AC. Facciasi intanto come la prima di queste velocità alla seconda così *Mm* a *Cq*, che sarà minore di *Cc*. Dunque sarà (§. 32.) il tempo per M*m* a quello per C*c* come M*m* a C*c*, e come C*q* ad M*m*, cioè come C*q* minore a C*c* maggiore. Sicchè il tempo per M*m* l' è minore di quello per C*c*, e 'l tempo per l' intiero arco AMB sarà pure minore di quello per ACB. C. B. D.

C. A. P. XIII.

DELL' OSCILLAZIONE DE' PENDOLI.

* §. 211. *Def. LV. Pendolo* o *corpo funependolo* appellasi il grave R (fig. 20.) legato all' estremità di un filo, di cui l' altro estremo sia fisso, e che in forza del suo peso può reciprocare le sue discese e salite intorno al punto C, ov' è sospeso.

* §. 212. *Def. LVI.* Il punto immobile C dicesi *centro di rotazione*, o *punto di sospensione.*

* §. 213. *Def. LVII.* La discesa del pendolo CR per l' arco RE, e la di lui salita per l' altro EN, dicesi *vibrazione*, ovvero *oscillazione* del pendolo.

* 214. *Def. LVIII. Pendolo semplice* è quello, che si concepisce come una verga sottilissima, dritta, rigida, e priva di gravità, e che nel solo estremo inferiore abbia concentrato un peso.

Tal' è per appunto il pendolo CR, ove si consideri la sua asta come una retta geometrica, e che nel solo estremo inferiore R abbia concentrato un peso.

* §. 215. *Def. LIX.* Ogni pendolo, che non è semplice, dicesi *composto*.

* §. 216. *Def. LX.* Quel punto di un pendolo composto, che tanto dista dal centro di rotazione, quant'è la lunghezza di un pendolo semplice isocrono ad esso pendolo composto, chiamasi *centro di oscillazione*.

Vale a dire le vibrazioni di un pendolo composto sono isocrone a quelle, che esso farebbe, se l'intera gravità delle sue parti s'intendesse riunita nel suo centro di oscillazione. Ed in questo modo potrebbesi anche formare quest'ultima definizione.

* §. 217. *Scol.* Dei pendoli semplici solamente io quì ragiono: e nel Cap. XXI. mi riserbo a trattare dei pendoli composti, e dei loro centri di oscillazione.

FROP. XL. TEOR.

* §. 218. *Il pendolo* CR *se mai si rimuova dal sito verticale, e poi si lasci cadere, dee vibrar circolarmente intorno al punto* C *di sospensione.*

Dim. Cotesto pendolo rimosso dal suo perpendicolo per l'angolo RCE, se mai si lasci a se stesso dee piombare per l'arco RE al punto infimo E, acquistando in siffatta discesa tanta velocità, ond'è obbligato a risalire per l'arco circolare EN al punto N tant'alto sull'orizzonte, che l'altro R. E quindi trovandosi in N privo di tutta quella velocità, che esso si ha acquistata discendendo per RE, sarà di nuovo forzato dal suo peso a discendere per l'arco NE: e nel punto infimo di questo acquisterà

tanta forza, sicchè dovrà ascendere per l' arco ER. Dal punto R il pendolo di bel nuovo discenderà in E, e da E monterà in N. E perpetuerebbe eternamente coteste oscillazioni, se la frizione del filo intorno al perno C, e la resistenza dell'aria affievolendo il suo moto nol riducessero alla quiete. C. B. D.

PROP. XLI. TEOR.

* §. 219. *Le forze acceleratrici di un pendolo, che vibra in archi circolari, sono come i seni degli archi, che gli restano a descrivere insino al punto infimo.*

E le velocità, che esso pendolo acquista nel punto infimo, sono come le corde degli archi, dond' è disceso.

Dim. Part. I. La dimostrazione della prima Parte rilevasi immediatamente dal §. 200; ond' ella può quì omettersi.

Par. II. E poichè tanta velocità acquista il pendolo calando per l' arco RE, quanta ne otterrebbe discendendo per l' altezza PE di esso: e tant' altra ne acquisterebbe nella discesa per BE, quanta gliene verrebbe in calando verticalmente per DE (§. 199.); saranno queste velocità in sudduplicata ragione delle riferite PE, DE (§. 45); cioè per la natura del circolo BER, come le corde RE, BE degli archi descritti RE, BE (8. El. VI). C. B. D.

PROP. XLII. TEOR.

* §. 220. *Se due pendoli oscillino in archi circolari simili, le durate delle loro vibrazio-*

ni saranno in sudduplicata ragione delle lunghezze di essi.

Dim. Gli archi simili (fig. 24.) descritti dai mentovati pendoli s' intendano posti d' intorno ad un comune centro A in modo, che i punti infimi T ed S di essi giacciano in una medesima verticale. Si trovi AL media proporzionale tra AT ed AS, e presa dell' arco BT una qualunque parte BQ, si congiungano i raggi AB, AQ, e le corde BQ, PR. Di poi per B e P si conducano le orizzontali BG, PO, nelle quali dai punti Q ed R si menino le perpendicolari QG, RO.

Essendo AP:PB::AR:RQ, saranno parallele le due rette QB, ed RP. Laonde essendo simili i triangoli ABQ, APR, sarà QB:RP come AQ ad AR. Ma BG è parallela a PO, e QG ad RO: dunque anche i triangoli QBG, RPO saranno simili tra loro, e sarà QG:RO::QB:RP::QA:AR. E quindi la sudduplicata ragione di QG ad RO, cioè quella, che ha la velocità di un grave disceso per l' arco BQ alla velocità di un grave disceso per l' arco PR (§. 45.) sarà uguale alla sudduplicata ragione dei raggi QA, AR, cioè a quella di AL ad AS. Si prendano intanto gli archetti infinitesimi Qq, Rr proporzionali a BQ e PR, e con ciò ai raggi AT, AS: saranno i tempi, nei quali vengono essi descritti dai gravi, che si lasciano cadere da B e P come AT ad AS, e come AS ad AL (essendo la prima ragione uguale a quella degli spazietti descritti, e la seconda inversa di quella delle velocità), cioè a dire come AT ad AL, o in sudduplicata ragione di AT ad AS. E ciò sempre dimostrando, sarà il tempo della discesa per

l' arco BT a quello per PS anche in suddupli-
cata ragione di AT ad AS (12 El. V). C. B. D.

PROP. XLIII. TEOR.

* §. 221. *I numeri delle oscillazioni, che due pendoli vibrando in archi circolari simili compiono in un dato tempo, sono in sudduplicata ragione inversa delle loro lunghezze.*

Dim. Il numero delle oscillazioni, che fa un pendolo in un dato tempo, sta al numero delle vibrazioni, che un altro ne compie nello stesso tempo, come la durata di una di queste alla durata di una di quelle. Ma queste durazioni, avvegnacchè i pendoli suppongonsi vibrare in archi circolari simili, sono (§. 220) nella sudduplicata ragione delle lunghezze dei medesimi pendoli. Dunque i numeri delle oscillazioni, che essi pendoli compiono in uno stesso tempo, sono in sudduplicata ragione inversa delle lunghezze di essi, quando gli archi descritti sieno tra se simili. C. B. D.

PROP. XLIV TEOR.

* §. 222. *Le oscillazioni, ch' esegue un pendolo per archi cicloidali, sono isocrone.*

La dimostrazione di questo Teorema è una conseguenza immediata di ciò che si è detto nella Prop. XXXVIII.

* §. 223. *Scol.* L' ingegnosissimo Cristiano Ugenio, cui deesi la gloria di aver caricati di pendolo gli oriuoli, si avvide, che le vibrazioni per archi cicloidali erano le sole isocrone nell' ipotesi della gravità costante: onde conve-

niva determinare il modo per farne gire un pendolo nel perimetro della cicloide, affinchè il tempo venisse con esattezza misurato. Or questa ricerca, come il potete intendere di leggieri, non era più meccanica, ma geometrica. Con che postosi il Valentuomo a speculare le insigni proprietà, di cui va fregiata la cicloide, vi rinvenne, ch' essa può generarsi dall' evoluzione di un' altra a lei simile ed uguale (Pren. VIII.): ond' ei per riuscir nel suo intento guidossi nel seguente modo « Prese due lamine
» (fig. 25.) semicicloidali CNA, CMB scana-
» late nelle parti convesse, e che erano simili
» ed uguali: le adattò poi che si toccassero nei
» punti estremi delle loro basi, cioè in C, e
» che la loro comune tangente in questi punti
» giacesse verticalmente. In fine ei sospese in
» mezzo ad esse il filo flessibile CNF uguale a
» ciascuna lamina, ed avente all' estremo il peso
» F » Egli è chiaro da siffatta costruzione, che il pendolo CNF spinto dall' oriuolo, cui l' è raccomandato, debba implicarsi alla lamina CNA, qualora ei sale per l' arco RA; e svilupparsene nel discendere. E che salendo per l' arco RGB debba avvolgersi all' altra lamina CMB, e da questa svilupparsene discendendo: e così segnar la cicloide ARB.

* §. 224. *Scol. II.* Quantunque la cicloide volgare sia una curva perfettamente isocrona (§. 207.); pur nondimeno le vibrazioni dei pendoli per archi cicloidali non sono equidiuturne, nè quindi all' esatta misura del tempo adattate. Imperocchè l' aria, che offre sensibile resistenza al pendolo mosso velocemente per la cicloide, la frizione di esso intorno al perno,

da cui è sospeso, il continuo stropicciamento del filo colle divisate lamine, alle quali in ciascuna oscillazione or se ne svolge, or si avviluppa, ed altre cagioni esterne, turbano grandemente l' isocronismo. Onde i Meccanici per l' esatta misura del tempo han dovuto prevalersi delle oscillazioni per archi minimi di cerchio, delle quali fa mestieri, che io quì vi esponga compiutamente ed in breve la Teorica.

PROP. XLV. TEOR.

* §. 225. *Le oscillazioni, ch' esegue il pendolo* (*fig.* 26.) CR *negli archi circolari minimi* RAL, EAK *sono isocrone. E 'l tempo di ciascheduna oscillazione sta a quello della discesa di un grave per la doppia lunghezza di esso pendolo, come la semicirconferenza di un cerchio al suo diametro.*

Dim. Par. I. Suppongasi, che l' angolo RCA sia assai picciolo, e si ponga la lunghezza AC del pendolo uguale ad r. Intanto dal punto R sull' arco RA si prenda l' altro arco RE$=s$, e dai punti R ed E si menino sulla verticale AC le perpendicolari RF, EG, e presa la HG infinitesima rispetto a GF, si distenda per H la orizzontale BI. In oltre si ponga AF$=a$, AG$=x$, e si dinoti con g la gravità terrestre. Sarà GE $=\surd(2rx-x^2)$, FG$=a-x$, GH$=$BO$=-dx$, EO $=$ D. $\surd(2rx-x^2)=\frac{rdx-xdx}{\surd(2rx-x^2)}$, EO$^2=$

$\frac{r^2dx^2-2rxdx^2+x^2dx^2}{2rx-x^2}$, ed EB$=ds$. Ma l' è pure

$EB=\sqrt{(EO^2+BO^2)}=$

$\sqrt{\left(dx^2+\frac{r^2dx^2-2rxdx^2+x^2dx^2}{2rx-x^2}\right)}$, o sia, eseguendo le riduzioni, $EB=\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2}{2rx-x^2}\right)}$,

ove la radice quadrata di r^2dx^2 dev' essere presa negativamente; poichè crescendo l' arco s, diminuisce la x. Dunque dev' essere EB, o sia

$$ds=\frac{-rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

Or lo spazietto ds si può supporre descritto equabilmente (§. 38.) nel tempuscolo dt colla velocità $\sqrt{(2g(a-x))}$, che un grave (§ 181. Eq. (9)) si acquista discendendo per la FG, cioè per lo spazio $a-x$. Dunque dev' essere

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{(2g(a-x))}},$$

ovvero $$dt=\frac{-rdx}{\sqrt{(2g(a-x))}\sqrt{(2rx-x^2)}};$$

e trascurando la x^2 per rapporto a $2rx$, si ottiene

$$dt=\frac{-rdx}{\sqrt{(2g(a-x))}\sqrt{(2rx)}},$$

e facendo le riduzioni, ne risulta

$$dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{-dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}.$$

Onde essendo $f.\frac{-dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=\text{ar. cos.}\left(\frac{2x}{a}-1\right)$,

ove la costante è nulla (poichè fatto $x=a$, ne diviene arc. cos. $\left(\frac{2x}{a}-1\right)$=arc.cos.1=o) ; dev' essere

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\ \text{arc. cos.}\left(\frac{2x}{a}-1\right).$$

Ma il proposto pendolo compie una semioscillazione mentre la x prende tutti i valori, che sono tra a e zero. Dunque se nel secondo membro della precedente equazione pongasi x=o, si avrà il tempo di una semioscillazione uguale ad

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\ \text{arc. cos.}-1.$$

e dinotando con $\pi:1$ il rapporto della circonferenza di un cerchio al raggio, si avrà arc. cos. $-1=\frac{\pi}{2}$, ed $\frac{1}{2}$ arc. cos. $-1=\frac{\pi}{4}$. Dunque il tempo di una semioscillazione del pendolo dovrà pareggiare

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

e quello dell' intiera oscillazione sarà uguale a

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Ma quest' ultima espressione non contiene la a. Dunque essa dee dinotare il tempo di un' oscillazione del pendolo CR per qualunque arco picciolissimo.

Par. II. In oltre se con T si dinoti il tempo della discesa libera di un grave per la doppia lunghezza $2r$ del pendolo, e con V la velocità finale di un tal grave, dovrà essere (§. 181. Eq. (6) e (9).)

$$gT=V\text{, e } V=\sqrt{2g.2r}=2\sqrt{gr}\text{;}$$

$$\text{e quindi } gT=2\sqrt{gr}\text{, e } T=2\sqrt{\frac{r}{g}}\text{.}$$

Dunque dee stare il tempo di un' oscillazione del proposto pendolo a quello della libera discesa di un corpo per la doppia lunghezza di esso, come $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} : 2\sqrt{\frac{r}{g}}$, o come $\frac{\pi}{2} : 2$; cioè come la semicirconferenza di un cerchio al suo diametro. C. B. D.

* §. 226. *Cor. I.* Essendo costante la ragione della semicirconferenza di un cerchio al suo diametro, sarà anche costante quella del tempo di una oscillazione al tempo della caduta verticale di un grave per la doppia lunghezza del pendolo.

* §. 227. *Cor. II.* E quindi se in due regioni della nostra Terra i tempi delle oscillazioni di uno stesso pendolo sieno tra se come $m:n$; questa stessa ragione dovran serbare i tempi, ne' quali un grave quivi discenderebbe da un'altezza dupla della lunghezza del pendolo. Ma quando le altezze sono uguali le forze acceleratrici debbono essere tra se nell' inversa duplicata ragione dei tempi (§. 175.). Dunque in queste regioni della Terra le forze acceleratrici dovranno essere nell' inversa duplicata ragione di $m:n$, cioè come $n^2:m^2$.

* §. 228. *Scol.* Il signor Richer volendo osservare nel mese di agosto del 1672 i passaggi

delle fisse per lo meridiano di Cajenna, isola distante per 5° dall' equatore terrestre, si avvide, che il suo oriuolo a pendolo quivi givane più lento del moto medio del Sole, cui erasi temperato in Parigi, e che la differenza di tempo montava in ogni giorno a 2'. 28''. Ei dunque colla guida di replicate osservazioni fu obbligato di accorciar di una linea ed un quarto la lunghezza di cotesto pendolo, che era di 3.pie. 8.lin. $\frac{3}{5}$. Il signor Hallei nel 1677 ritrovò, che il suo oriuolo, il quale in Londra oscillava a secondi, più lentamente vibrava nell'Isola di S. Elena. Nel 1682 i sigg. Varin e Des Hayes rinvennero, che nell' Isola Gorea un pendolo dovea esser lungo 3pi. 6lin. $\frac{5}{9}$ per essere isocrono a quello di 3pi. 8lin. $\frac{5}{7}$, che nell' Osservatorio Reale di Parigi oscillava a secondi: e che nella Guadalupa e nella Martinicca cotesto pendolo dovea essere di 3pi. 6lin. $\frac{1}{2}$. Altri Astronomi in altri tempi, ed in altre regioni della nostra Terra osservarono lo stesso. Onde da tante osservazioni siam sicuri, che la gravità sotto l' equatore terrestre sia minore di quella, che è sotto a' poli della nostra Terra, e nelle regioni intermedie.

* 229. *Déf. LXI. Piede orario* è la terza parte della lunghezza di un pendolo semplice, che in un secondo compie un' oscillazione per un arco minimo di cerchio.

* §. 230. *Determinare il piede orario per una data regione della Terra.*

Sol. In questa data regione della Terra un pendolo semplice della lunghezza L oscillando in archi circolari minimi compia (1) in un' ora il numero n di vibrazioni: cioè sia n il numero delle vibrazioni da esso eseguite in 3600''. Sarà la durata di ciascuna oscillazione uguale a 3600'':n. Sia intanto x la lunghezza di quel pendolo semplice, che quivi oscilli a secondi, cioè che faccia una minima oscillazione circolare in un secondo. Sarà (§. 220.)

$$\sqrt{L} : \sqrt{x} :: \frac{3600''}{n} : 1'', \text{ ed } x = nnL : 12960000.$$

Dunque un piede orario, ch'è $\frac{x}{3}$, sarà nnL : 38880000. C. B. F.

* §. 231. *Scol. I.* Niuna cosa dovrebbesi tanto preservare dall' alterazione, quanto l' unità delle misure, che ciascun popolo suole adottarsi per valutar le altre, e che ei sovente è obbligato a quelle delle straniere Nazioni rapportare. Ma come mai ella può garantirsi dal tempo edace, e da tante segrete potentissime cagioni,

(1) Il centro di oscillazione di una palla ponderosa, che penda da un sottilissimo filo, si rinviene nel seguente modo. Facciasi come la distanza del centro di sospensione e del centro della sfera al raggio della sfera, così questo raggio ad un quarto, e di questo se ne prendano due quinti. Sarà il centro di oscillazione per questi due quinti più depresso del centro della sfera.

onde frequentemente ne viene alterata? Il solo mezzo dovuto alla perspicacia di Cristiano Ugenio è di regolar queste misure col piede orario, che se non è una grandezza costante ed universale presso tutte le Nazioni, a cagione dello schiacciamento della Terra ne' suoi poli, e delle differenze delle forze centrifughe ne' diversi punti della superficie di essa; pur non di meno a tale si può ridurre da ogni Nazione mediante semplicissime riduzioni, come si dimostra ne' corsi di Astronomia Fisica. Il qual mezzo l'è assai più semplice e facile a potersi in ogni rincontro verificare, che l'altro di far dipendere l'unità di lunghezza presso tutte le Nazioni dalla lunghezza del quadrante del meridiano terrestre, come in seguito è stato stabilito dai Geometri Francesi.

* §. 232. *Scol. II.* Oltre a questo vantaggio, che ritraggliamo da' pendoli, evvi quell' altro di conoscere quanto spazio in un secondo trascorrasi da un grave, che si lasci giù cadere nelle vicinanze di nostra Terra. Per intenderne l'artifizio basta por mente alla verità della Prop. XLV. Par. II. In fatti essendo di $881^{\text{lin.}}\frac{1}{5}$ la doppia lunghezza del pendolo, che in Parigi oscilla a secondi (§. 228.); sarà 1'' al tempo della discesa di un grave per $881^{\text{lin.}}\frac{1}{5}$ parigine, come la semicirconferenza di un cerchio al suo diametro, cioè come 3,1415926 : 2. E quindi il tempo della natural discesa di un grave per $881^{\text{lin.}}\frac{1}{5}$ sarà 0'',6359768. E facendosi il qua-

drato di questo tempo al quadrato di $1''$, così $881^{\text{lin.}} \frac{1}{5}$ allo spazio percorso in $1''$ (§. 45.); questo sarà di piedi parigini 15, 1.

CAP. XIV.

DEL MOTO DE' GRAVI PROJETTATI DALLA SUPERFICIE TERRESTRE PER DIREZIONI NON VERTICALI.

PROP. XLVII. TEOR.

* 233. *Se dal luogo (fig. 27 n.° 1° e n° 2°)* A *della superficie terrestre si projetti un grave per la direzione* ABC *non verticale, e colla velocità dovuta all' altezza* AE; *il suo sentiere sarà una parabola conica, di cui la verticale condotta dal luogo della projezione n'è un diametro, che ha per parametro il quadruplo dell' altezza* AE, *e per ordinate le parallele alla direzione* ABC.

Dim. Se il proposto corpo si lasciasse liberamente cadere dal luogo A, gli spazii AD, AE da esso descritti sarebbero come i quadrati dei tempi impiegati a descriverli: e se la forza impressa al corpo A per la direzione AC si risolva nelle due AH, HB, di cui la prima orizzontalmente si esercita da A verso P, e l'altra verticalmente; colla prima di queste due forze il corpo dovrebbe descrivere gli spazii AH, AL, e colla seconda gli spazii BH, CL proporzionali ai tempi. Onde siccome muovendosi il corpo equabilmente per AC coll' intiera forza impressagli, esso si trova nei punti B e C nei medesimi istanti, in che colla sola spinta orizzontale ne perver-

rebbe nei punti H ed L; egli è manifesto, che se il corpo ne sia spinto per AC mentre di continuo n'è sollecitato a muoversi per direzioni parallele ad AN, gli spazii verticali, pei quali esso si allontana dalla retta AC, dovranno essere rispettivamente uguali a quelli, che ne' medesimi tempi descriverebbe se dal luogo A si lasciasse liberamente cadere per la verticale AN. Dunque gli spazii BR, CT, che il corpo si trova aver descritti in virtù della gravità terrestre allora che ai punti B e C colla sola forza di projezione ne sarebbe pervenuto, saranno come i quadrati dei tempi impiegati a percorrere equabilmente gli spazii AB, AC colla velocità di projezione; cioè dovrà stare $BR:CT::AB^2:AC^2$, e compiti i parallelogrammi ABRD, ACTE, sarà pure $AD:AE::DR^2:ET^2$. Adunque la curva ARTP è tale che le ascisse AD, AE sono come i quadrati delle semiordinate DR, ET; e perciò essa dev'essere una parabola, di cui i diametri sono verticali.

In oltre sia ET quella semiordinata al diametro AN, che pareggi il doppio dell'ascissa AE, e si compisca il parallelogrammo ACTE. Sarà CT, ovvero AE lo spazio, che sarebbe descritto dal corpo A uniformemente accelerato dalla gravità terrestre nel tempo, in che esso colla sola velocità di projezione ne descriverebbe la AC. Ma se il corpo A si muova equabilmente colla velocità, che si acquista discendendo per CT; lo spazio, che esso descrive nel medesimo tempo, pareggia 2CT. Dunque la velocità di projezione sta alla velocità, che il corpo si acquista scendendo per CT, ovvero per AE, come AC:2CT, o come ET:2AE. Ma ET pareggia 2AE. Dun-

que la velocità, colla quale il corpo n' è projettato per AC pareggia quella, che esso si acquisterebbe liberamente scendendo per AE. Ma se per P si dinoti il parametro del diametro AN, l'è P. AE=ET'=4AE,' e con ciò P=4AE. Dunque ec. C. B. D.

* §. 234. *Cor. I.* Tanto tempo v' impiega il corpo A a descrivere l' arco parabolico AR, quanto vi porrebbe a condursi equabilmente colla velocità di projezione per la semiordinata RD, che ad esso arco corrisponde, o a calar naturalmente per l'ascissa AD.

* §. 235. *Cor. II.* Da quel che si è recato nella precedente dimostrazione può inferirsene di leggieri, che i tempi impiegati dal corpo a percorrere gli archi parabolici (fig. 27 n° 1°) AR, RT sieno come le rette AH, HL. E quindi se la retta orizzontale AP distesa pel luogo della projezione, si divida nelle parti AH, HO, OK, ec. uguali tra loro, e pei punti delle divisioni si ergano le verticali HR, OG, KM, ec.; saranno gli archi parabolici AR, RG, GM, ec. descritti in tempi uguali. Dunque *sebbene un corpo, che si lanci dalla nostra Terra, non vada equabilmente pel suo sentiero parabolico; pur non di meno in tempi uguali passa al di sopra di uguali parti dell' orizzontale condotta dal luogo della projezione.*

* §. 236. *Cor. III.* E poichè la AE è quarta parte del parametro del diametro AN, ed il ramo FA della parabola corrispondente al punto A è pure quarta parte dello stesso parametro, dev' essere AE uguale ad AF. Ma AF pareggia la perpendicolare AS, che dal punto A si abbassa sulla linea di sublimità SQ della parabola

Dunque *la velocità iniziale di un corpo, che essendo spinto da un luogo della superficie terrestre per una direzione non verticale ne descrive una parabola, è quella stessa, che esso corpo si acquisterebbe discendendo verticalmente al luogo della projezione dal corrispondente punto della linea di sublimità di quella parabola.*

* §. 237. *Def. LXII.* L'angolo SAC formato dalla AC direzione del projetto colla verticale SA dicesi *angolo di projezione*: e 'l suo complemento CAP, cioè quell'angolo, che formasi dalla direzione del projetto e dalla orizzontale AP, suol dirsi *angolo di elevazione*, o semplicemente *elevazione*.

* §. 238. *Def. LXIII. L'ampiezza della parabola* ATP è quella di lei corda AP, che dal luogo della projezione orizzontalmente si distende.

* §. 239. *Def. LXIV.* La retta AV, che unisce il luogo A della projezione col bersaglio V, chiamasi *lunghezza del tiro*.

* §. 240. *Def. LXV. La velocità iniziale, o di projezione* è quella, onde vien lanciato un grave.

PROP. XLVIII. TEOR.

* §. 241. *L'ampiezza della parabola, la velocità iniziale, e l'angolo di elevazione, hanno un tal nesso tra loro, che ciascuna di esse può dalle altre due rilevarsi.*

Dim. Un grave projettato dal luogo (fig. 28.) A per la direzione AT descriva la parabola AMO. La retta BA sia l'altezza dovuta alla velocità iniziale, l'angolo PAT sia quello d'elevazione,

l' altro BAT di projezione, ed AO l' ampiezza della parabola AMO. Si tiri la retta FA dal fuoco F di questa curva al luogo della projezione, e si calino FH, FP rispettivamente perpendicolari sulle rette BA, AO. Sarà la retta FH uguale alla PA, cioè ad un mezzo dell'ampiezza AO della parabola: e s' intenderà da' conici, che il ramo FA sia quanto la BA altezza dovuta alla velocità di projezione, e che l' angolo FAB sia duplo di quello di projezione TAB. Per la qual cosa siccome il cateto FH, l' ipotenusa FA, e l'angolo acuto FAH son tre parti del triangolo rettangolo FAH, da due delle quali può sempre l' altra rilevarsi; così l' ampiezza della parabola, la velocità iniziale, e l' angolo d' elevazione, ch' è complemento di quello della projezione, hanno tal nesso tra loro, che ciascuna di esse può agevolmente rilevarsi dalle altre due. C. B. D.

* §. 242. *Def. LXVI.* Quel triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa l' altezza dovuta alla velocità di projezione, per uno de' suoi cateti la metà dell' ampiezza della parabola, e l' angolo acuto, che sottende tal cateto è duplo dell' angolo di projezione, può chiamarsi *triangolo balistico.*

* §. 243. *Cor. I.* Dai punti M e B conducansi le rette MG, BQ parallele alla FH. Sarà BG uguale a GH, com' è MQ uguale ad MF (§. 236.). Dunque AG è media aritmetica tra BA ed AH. Vale a dire *l' altezza massima cui ascende il projetto, è la semisomma dell' altezza dovuta alla velocità iniziale e del rimanente cateto del triangolo balistico.*

* §. 244. *Cor. II.* Congiunta la BF, sarà

BT : TF :: BG : GH, e quindi BT uguale a TF, ed i triangoli ATB, ATF avendo i lati uguali ciascuno a ciascuno, debbono avere l'angolo ATB uguale all' altro ATF, e quindi son rettangoli. Il perchè (8 El. VI.) dee stare AB : AT::AT : AG, e con ciò AB:AG::AB² : AT². Dunque *l'altezza dovuta alla velocità iniziale sta alla massima altezza, cui ascende il projetto, in duplicata ragione del raggio al coseno dell' angolo di projezione.*

PROP. XLIX. TEOR.

§. 245. *Poste le medesime cose della prec. Prop., l'ampiezza della parabola è quanto l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno del doppio angolo di projezione. E l'altezza massima, cui ascende il projetto, adegua l'altezza dovuta alla velocità iniziale multiplicata pel quadrato del coseno dell'angolo di projezione.*

Dim. Par. I. Nel triangolo balistico FAH (ove il cateto FH dinoti la metà dell' ampiezza della parabola, l'angolo FAH il duplo di quello di projezione (§. 237.), ed FA l'altezza dovuta alla velocità iniziale), sta FH ad FA come il seno dell' angolo FAH al raggio, che si ponga uguale ad 1. Dunque sarà FH uguale ad FA multiplicata pel seno di FAH : e quindi prendendo i doppii, sarà AO, cioè l'ampiezza della parabola uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale multiplicata pel doppio seno di FAH, ch'è duplo dell' angolo di projezione.

Par. II. E poichè (§. 244.) l'altezza massima, cui ascende il projetto, sta all' altezza

dovuta alla velocità iniziale, come il quadrato del coseno dell' angolo di projezione al quadrato del raggio; sarà l' altezza massima del projetto uguale all' altezza dovuta alla velocità iniziale multiplicata pel quadrato del coseno dell' angolo di projezione. C. B. D.

* §. 246. *Cor. I.* Dunque *le ampiezze delle parabole, che descrivonsi da' gravi lanciati con uguali velocità di projezione, sono tra se come i seni dei doppii angoli di projezione. E le altezze massime, alle quali ascendono cotesti gravi, sono in duplicata ragione dei coseni degli angoli di projezione.*

* §. 247. *Cor. II.* Suppongasi essere semiretto l' angolo BAT di projezione; il fuoco della parabola, che descrivesi dal projetto, dovrà cadere nel punto medio della di lei ampiezza, cioè in P: e dovrà in tal caso, come ne appare dai conici, essere AB metà di AO, ed MP di AP. Dunque *l' ampiezza della parabola descritta da un corpo lanciato sotto l' angolo semiretto, l' altezza dovuta alla velocità iniziale, e la massima altezza, cui ascende il projetto, sono come* 4, 2, 1.

* §. 248. *Scol.* In un sol tiro di mortaro, o di cannone, che facciasi per saggio in un campo ben ampio ed orizzontale, si misuri l'ampiezza della parabola descritta dal projetto, e dall' ampiezza se ne calcoli l' altezza dovuta alla velocità iniziale. Conosciuta in tal modo quest' altezza si potranno coi principii di questa Proposizione determinare le ampiezze delle parabole, e le loro massime altezze in qualunque altra elevazione voglia darsi al pezzo.

* §. 249. *Di tutte le parabole, che descrivonsi da' gravi projettati con velocità uguali, e con diverse elevazioni, quella terrà la massima ampiezza, che ha semiretto l' angolo d' elevazione. E saranno uguali le ampiezze di due parabole descritte da' gravi projettati con velocità uguali, se i loro angoli di projezione sieno equidifferenti dal semiretto.*

Par. I. Essendo semiretto l' angolo d' elevazione, e con ciò anche quello di projezione; il duplo di questo sarà retto, ed avrà il massimo seno. Dunque l' ampiezza della parabola descritta coll' angolo semiretto d' elevazione sarà la massima in parità di altre circostanze (§.246.).

Par. II. I due angoli di projezione BAT, BA*t* differiscano ugualmente dal semiretto, quello però per difetto, questo per eccesso; i loro doppii dovran pure differire ugualmente dal retto, ed avranno uguali seni. Dunque le ampiezze delle parabole descritte coi mentovati angoli di projezione, e con pari velocità iniziali, essendo nella ragione de' seni di questi angoli (§.246.), saranno tra se uguali. C. B. D.

*§. 250. *Cor. I.* Sia l' angolo BAT di 15°, e l' altro BA*t* di 75°, i quali angoli sono dal mezzo retto equidifferenti; saranno uguali le ampiezze delle parabole, che con questi angoli di projezione, e con uguali velocità iniziali descrivonsi da' projetti.

*§. 251. *Cor. II.* Ma poichè il duplo di BAT è in tal caso di 30°, il cui seno è una metà del raggio; sarà l' ampiezza della parabola descritta da un corpo, che avventasi sotto l' an-

golo di 15, o di 75°, uguale all' altezza dovuta alla velocità iniziale.

PROP. LI. PROBL.

* §. 252. *Data la velocità iniziale, e lo scopo* (*fig.* 29.) I, *che vuol ferirsi dal luogo* A; *ritrovare il convenevole angolo di projezione.*

Sol. Sia AC l' altezza dovuta alla velocità iniziale. Sarà 4AC il parametro del diametro AE della parabola, che descrivesi dal corpo qualora dal luogo A si projetta colla velocità dovuta all' altezza AC. Intanto dal luogo A si distenda la retta orizzontale AB, che stia nello stesso piano verticale colla lunghezza AI del tiro: e si ponga $AC=a$, $AI=c$, l' angolo $IAB=\varphi$, e l' angolo di projezione $CAF=x$. Sarà il parametro di $AE=4a$, $AB=c.\cos.\varphi$, $BI=c\,\text{sen}.\varphi$, e l' angolo di elevazione $BAF=90°-x$. Ma sta $1:\text{tang}.BAF::AB:BF$, o sia, sostituendo i simboli, $1:\text{tang}.(90°-x)::c\cos.\varphi:BF$. Dunque dev'essere $BF=c\cos.\varphi\,\text{tan}.(90°-x)=c\cos.\varphi\cot.x$. Il perchè dev' essere $FI=c\cos.\varphi\cot.x-c\,\text{sen}.\varphi$, ed $AF^2=AB^2+BF^2=c^2\cos.^2\varphi+c^2\cos.^2\varphi\cot.^2x$, o sia (conducendo pel punto I la retta IG parallela ad AF)

$$AG=c\cos.\varphi\cot.x-c\,\text{sen}.\varphi,$$

ed $$IG^2=c^2\cos.^2\varphi+c^2\cos.^2\varphi\cot.^2x.$$

Ma la richiesta parabola dee passare pel punto I. Dunque convien che sia $IG^2=4AC.AG$, e ne' simboli

$c^2\cos.^2\varphi + c^2\cos.^2\varphi\cot.^2x = 4ac\cos.\varphi\cot.x - 4ac$ $\text{sen}.\varphi \ldots$ (1),
ed ordinando quest' equazione per rapporto a $\cot.x$, si ha

$$\cot.^2x - \frac{4a\cot.x}{c\cos.\varphi} + \frac{4ac\,\text{sen}.\varphi}{c^2\cos.^2\varphi} + 1 = 0,$$

dalla quale si ottiene

$$\cot.x = \frac{2a}{c\cos.\varphi} \pm \sqrt{\left(\frac{4a^2}{c^2\cos.^2\varphi} - \frac{4ac\,\text{sen}.\varphi}{c^2\cos.^2\varphi} - 1\right)},$$

o sia

$$\cot.x = \frac{2a}{c\cos.\varphi} \pm \frac{1}{c\cos.\varphi}\sqrt{\left(4a^2 - 4ac\,\text{sen}.\varphi - c^2\cos.^2\varphi\right)};$$

dalla quale equazione si rileva, 1° che se il binomio $4ac\,\text{sen}.\varphi + c^2\cos.^2\varphi$ sia maggiore di $4a^2$, ne diviene immaginario il radicale, ch' è nel secondo membro, e quindi colla data velocità di projezione non si potrà dal luogo A ferire il bersaglio I; 2° che se quel binomio sia minore di $4a^2$, sotto ciascuno di due diversi angoli di elevazione si potrà ferire il bersaglio I; 3° e che que' due angoli si riducono ad un solo qualora si trovi $4a^2 = 4ac\,\text{sen}.\varphi + c^2\cos.^2\varphi$. C.B.F.

*§. 253. *Cor.* Sieno CAF, CAH gli angoli, le cui cotangenti sono rispettivamente uguali a

$$\frac{2a}{c\cos.\varphi} - \frac{1}{c\cos.\varphi}\sqrt{\left(4a^2 - 4ac\,\text{sen}.\varphi + c^2\cos^2\varphi\right)};$$

ed a

$$\frac{2a}{c\cos.\varphi} + \frac{1}{c\cos.\varphi}\sqrt{\left(4a^2 - 4ac.\text{sen}.\varphi + c^2\cos.^2\varphi\right)};$$

saranno AF, ed AH le direzioni secondo le quali converrà spingere il grave colla velocità dovuta all'altezza AC, affinchè ferisca il bersaglio I. Ma nel primo caso il sentiero del projetto sarà la parabola ADI, e nel secondo l'altra AOI. Dunque nel primo caso il projetto incontra il bersaglio per una direzione più prossima alla linea orizzontale, che nel secondo. Il perchè qualora si voglia abbattere un muro verticale gioverà dirigere il projetto per AF, e volendo sfondare un piano orizzontale converrà spingerlo per AH.

PROP. LII. TEOR.

* §. 254. *Il più ampio tiro, che può farsi sulla retta* AI, *lanciando un corpo dal luogo* A *colla velocità dovuta all'altezza* AC, *si ha quando l'angolo di projezione* CAL *è metà dell'altro* CAI *fatto dalla verticale colla linea* AI *del tiro. E gli angoli di projezione* CAF, CAH *sotto de' quali deesi spingere un grave, affinchè dal luogo* A *possa ferirne uno stesso punto della retta* AI, *sono equidifferenti dall'angolo* CAL *del massimo tiro.*

Dim. Par. I. Poichè dall'equazione (1) precedente Problema si ha

$$c = \frac{4a(\cos.\varphi\cot.x - \text{sen}.\varphi)}{\cos.^2\varphi + \cos.^2\varphi\cot.^2 x} =$$

$$\frac{4a(\cos.\varphi\cos.x\,\text{sen}.x - \text{sen}.\varphi\,\text{sen}.^2 x)}{\cos.^2\varphi(\text{sen}.^2 x + \cos.^2 x)};$$

cioè

$$c=\frac{4a\,\text{sen}.x\cos.(\varphi+x)}{\cos.^2\varphi}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1);$$

egli è chiaro, che il massimo valore di c, che ne dinota la lunghezza del tiro, debba aver luogo quando ne diviene un massimo il fratto $\frac{4a\,\text{sen}.x\cos.(\varphi+x)}{\cos.^2\varphi}$, ovvero il prodotto sen. x cos.$(\varphi+x)$, per esserne costanti le grandezze a e φ. Dunque qualora c ne diviene un massimo dev' essere

$$dx(\cos.x\cos.(\varphi+x)-\text{sen}.x\,\text{sen}.(\varphi+x))=0,$$

cioè $\cos.(\varphi+2x)=0$, e $\varphi+2x=90°$.

Il perchè dev'essere $x=\frac{90°-\varphi}{2}$;

cioè l' angolo CAL uguale alla metà dell' altro CAI.

Par. II. Si dinoti con x' la differenza LAF de' due angoli CAL, CAF. Sarà l' angolo CAF

$$=\frac{90°-\varphi}{2}+x'=45°-\frac{\varphi}{2}+x'.$$

Intanto nell' equazione (1) della precedente Parte in luogo di x si ponga $45°-\frac{\varphi}{2}+x'$. Dovrà risultarne

$$c=\frac{4a\,\text{sen}.\left(45°-\frac{\varphi}{2}+x'\right)\cos.\left(45°+\frac{\varphi}{2}+x'\right)}{\cos.^2\varphi}$$

Ma sen. $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} + x'\right)$ pareggia

cos. $\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} - x'\right)$, e cos. $\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} + x'\right)$ adegua sen. $\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} - x'\right)$. Dunque dev' essere pure

$$c = \frac{4a \cos.\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} - x'\right) \text{sen.}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} - x'\right)}{\cos.^2 \varphi}$$

Ma quest' ultima equazione si ottiene anche ponendo nell' altra (1) $45^\circ - \frac{\varphi}{2} - x'$ in luogo di x, e sono poi gli angoli $45^\circ - \frac{\varphi}{2} + x'$ e $45^\circ - \frac{\varphi}{2} - x'$ equidifferenti dall' angolo $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. Dunque il più ampio tiro ec. C. B. D.

§. 255. *Cor.* Dall' equazione

$$c = \frac{4a \,\text{sen.} x \cos.(\varphi + x)}{\cos.^2 \varphi}$$

si rileva, che si possa determinare la lunghezza c della linea del tiro, qualora si conoscono la posizione della stessa linea, l' angolo di projezione, e la velocità iniziale: e che si possa determinare la velocità iniziale essendo date la posizione e la lunghezza della linea del tiro insieme coll' angolo di projezione.

PROP. LIII. TEOR.

§. 256. *I tempi, ne' quali il corpo* A *lanciato con una stessa forza, e negli angoli di projezione* CAH, CAF *equidifferenti dall' altro* CAL *del massimo tiro va a ferirne la stessa retta* AI, *sono come i seni degli angoli* HAI, FAI, *che le rette di projezione fanno colla linea* AI *del tiro.*

Dim. Poichè i tempi, nei quali il corpo A percorre gli archi parabolici AOI, ADI sono rispettivamente uguali a quelli, nei quali lo stesso corpo ne percorrerebbe equabilmente (§. 234.) gli spazii AH, AF colla velocità, che esso si acquisterebbe liberamente scendendo per CA; dovranno essere gli stessi tempi nella ragione di AH ad AF. Ma AH sta ad AF come sen. AFI a sen. AHI, o come sen. FAC: sen. HAC. Dunque dee stare il tempo, in che il corpo A lanciato per la direzione AH colla velocità dovuta all' altezza CA ne percorre l' arco AOI, al tempo, in che lo stesso corpo lanciato per la direzione AF colla medesima velocità ne percorre l' arco parabolico ADI, come sen.FAC: sen.HAC. Onde essendo tra se uguali tanto gli angoli LAC, LAI, che gli altri LAH, LAF, dev' essere pure sen. FAC=sen.HAI, e sen. HAC =sen.FAI. Il perchè dee stare il tempo per AOI a quello per ADI, come sen. HAI : sen. FAI. Dunque i tempi, ne' quali ec. C. B. D.

CAP. XV.

DEFINIZIONI DELLE PRINCIPALI MACCHINE, E DELLE FORZE AD ESSE APPLICATE.

§. 257. *Def. LXVII.* Le *Macchine* sono quegli strumenti congegnati dall' uomo, o dalla Natura per muovere vantaggiosamente i corpi.

§. 258. *Scol.* Negli effetti, che colle macchine produciamo, evvi sovente un risparmio della forza, o del tempo, ond' essi dovrebbersi assolutamente ottenere: e questi son que' principali vantaggi, che da tali strumenti ricaviamo. Or sebbene il gran Galilei, e con seco i Meccanici posteriori abbiano creduto non potersi congiuntamente promuovere ed ottenere cotesti vantaggi e che la promozione dell' uno torni a discapito dell' altro; pur non di meno seguendo le orme di Eulero vi mostrerò nel Cap. XIX. ciò esser vero nelle Macchine ideali, che sogliono considerarsi nude d' inerzia e di peso, e non già nelle reali, i di cui pezzi, che le compongono, sono essenzialmente ricolmi di tali forze ed avvivati.

§. 259. *Def. LXVIII.* Le macchine, che sono opere della Natura, diconsi *Naturali*, ed *Artificiali* quelle, che l' uomo pe' suoi vantaggi si ha congegnate.

§. 260. *Def. LXIX.* Quell' effetto, che vuol ottenersi con risparmio di tempo, o di forza, dicesi *resistenza*, e la forza, che vel produce, si domanda *potenza*.

§. 261. *Scol.* Le potenze, che con altra espressione sogliono dirsi forze moventi, non sono che *i pesi*, *le molle*, *il potere espansi-*

vo dell' aria, *de' fluidi aeriformi*, ec. (le cui azioni sono continue), *le forze animali*, *gl'impulsi delle acque*, *il vento*, ed altre simiglianti cagioni, che sogliono con intermittenza sulle Macchine operare. Ma sì quelle, che queste talora agiscono uniformemente replicando spinte uguali in uguali particelle di tempo, e talora variano sensibilmente nel modo, e nell' energia di agire. E riguardo alle resistenze procuratici con delle macchine, chi può divisarne le specie, e le differenze loro? pur non di meno i principali di questi effetti riduconsi *a trarre de' gran pesi*, *ad elevarli*, *a fargli scendere adagio*, *a vibrarli*, *a volgerli velocemente*, *a percuoter forte altri corpi*, *a fenderli*, *a stringerli*, *a stritolarli*, ec. e ciò in infinite diverse guise secondo i diversi fini, cui le macchine destiniamo.

§. 262. *Def. LXX.* La potenza equilibrasi colla resistenza, se dalle vicendevoli loro azioni niun moto ne segua nella macchina, ove amendue sono applicate.

§. 263. *Def. LXXI.* L' equilibrio di più corpi, che tra se agiscono, si dice *stabile* o *fermo*, se spinti da una picciola forza comminciano ad oscillare, ma tantosto riprendano la quiete e 'l primiero sito.

Così se dassi una picciola spinta ad una catena sospesa per i suoi estremi, si vedrà immantinente oscillare, ma di lì a poco fermerassi, come dianzi essa era.

§. 264. *Def. LXXII.* L' equilibrio di più corpi si dirà *labile*, se una picciola forza ad essi impressa li metta a guasto, facendoli crollar tutti o buona parte di essi.

Così se un arco ne sia formato da più corpi, il quale in virtù dei pesi di questi si mantenga in sito verticale, e si rechi una picciola spinta in un punto qualunque di tale arco, esso si abbatterà ben tosto, nè si rimetterà più nella primiera posizione.

§. 265. *Scol.* Una potenza non può mai agire sulla resistenza, nè questa opporsele in verun modo, se le loro forze non si diffondano per l' intiera macchina, ove amendue sono applicate. Or questa vicendevole diffusione di forze non è una libera trasfusione dell' energia della potenza sulla resistenza, e dell' energia di questa su di quella; poichè ciascuna di esse dee perdere quella sua parte, che i sostegni della macchina ne assorbiscono. Dunque I° non è l' intiera forza della potenza quella, che investe la resistenza; nè tutta l' energia di questa opponesi interamente alla potenza. II° La ragione dell' equilibrio tra la potenza e la resistenza vuol essere riposta nel divisato assorbimento delle loro forze. III° E se ci riuscisse saper nelle macchine la quantità di questo assorbimento, e 'l modo, onde per esse diffondonsi le forze della potenza e della resistenza, si potrebbero senza stenti e direttamente raccorre i caratteri, e le condizioni dell' equilibrio loro.

§. 266. *Def. LXXIII.* Le macchine si distinguono in *semplici* e *composte*. È semplice una macchina, se in un sol luogo di essa facciasi un parziale assorbimento delle forze, che vi agiscono. E se questo assorbimento di forze succeda in più luoghi della macchina distanti tra loro, essa si dirà *composta*.

§. 267. *Cor.* Se da più macchine semplici

se ne congegni un' altra, questa sarà una macchina composta.

§. 268. *Scol.* Le macchine semplici non sono che la *Leva*, l' *Asse nella ruota*, la *Girella*, il *Piano inclinato*, la *Vite*, e 'l *Cuneo*, le quali quaggiù ne son descritte, e nel seguente Capo sarà mostrato qual rapporto in ciascuna di esse debba serbar la potenza alla resistenza per equilibrarvisi.

§. 269. *Def. LXXIV.* La *Leva* è una verga ben rigida e dritta, la quale intorno ad un punto della sua lunghezza aggirasi circolarmente. Questo punto di rotazione chiamasi *sostegno* o *punto di appoggio*, e si dicono *braccia della leva* quelle parti di essa, che restano trà ciascun suo estremo e 'l sostegno.

§. 270. *Def. LXXV.* Una leva si dirà *di primo genere*, se in un estremo di essa siavi applicata la potenza, nell' altro la resistenza, ed in mezzo a queste il sostegno. Essa si dirà di *secondo genere*, quando il sostegno stia in un suo estremo, nell' altro vi si applichi la potenza, ed in mezzo a questa ed a quello vi si trovi la resistenza. Finalmente una leva dirassi *di terzo genere*, se mai la potenza stia tra la resistenza e 'l sostegno.

§. 271. *Scol.* La fig. 30 n.° 1° ne dinota una leva di primo genere, la fig. 30 n.° 2° ne dinota una leva di secondo genere, e la fig. 30 n.° 3° disegna una leva di terzo genere. In ciascuna di queste leve P ne dinota la potenza, R la resistenza, e C il sostegno, o punto di appoggio.

§. 272. *Def. LXXVI.* Una leva dicesi *angolare*, se due verghe rigide e dritte congiunte ad

angolo nei loro estremi possano volgersi circolarmente intorno all' apice dello stesso angolo.

§. 273. *Scol.* (fig. 31.) ACB rappresenta una leva angolare, di cui le verghe CA, CB trovansi fortemente tra se congiunte in C, e quivi imperniate in modo, che possono solamente aggirarvisi nel piano del loro angolo.

§. 274. *Def. LXXVII. L' asse nella ruota* è un cilindro retto di materia dura saldamente impiantato in mezzo ad una ruota di maggior diametro di esso, ed in modo, che avendo questi solidi un medesimo asse vi si possano aggirare insieme agevolmente.

§. 275. *Scol. I.* La fig. 32. rappresenta la macchina, che ho quì definita, ove IKL è la ruota, ed EFHG il cilindro saldatole fortemente nel centro di essa, ed aventi il comune asse BD, intorno a cui son volubili insieme.

§. 276. *Scol. II.* Per adoperar questa macchina deesi all' estremo del raggio della ruota applicare una potenza, la quale volgendo essa ruota avvolga nel cilindro quella corda, cui è legato il peso da strascinarsi, o elevarsi.

§. 277. *Def. LXXVIII.* La *girella* è un cilindro retto di materia dura, scanalato circolarmente nella sua parte convessa, e volubile intorno al suo asse, che ha un diametro assai minore di quello di essa girella.

La cassa, ove contiensi la girella, e dentro cui si aggira, dicesi di lei *armatura*, e l' intiera macchina composta dalla girella e dall'armatura domandasi *taglia*, o *carrucola*.

§. 278. *Def. LXXIX.* La girella si dirà *stabile*, se solamente si aggiri intorno al suo asse, e si dirà *mobile*, se oltre a questo moto ne abbia un altro progressivo.

§. 279. *Scol. I.* Le fig. 33 e 34 dinotano la girella stabile e l'altra mobile.

§. 280. *Scol. II.* Volendo adoperar questa macchina deesi nella sua scanalatura adattare una corda, e ad un capo di questa applicare la potenza. E se la girella sia stabile, dovrà all'altro capo legarsi quel peso, che si vuol trarre: se ella sia mobile, dovrà questo capo annodarsi ad un immobile ritegno, legandone il peso all'armatura della girella.

§. 281. *Def. LXXX. Piano inclinato* è un piano duro ed immobile, che non sia verticale nè orizzontale (§. 182.).

§. 282. *Def. LXXXI.* La *vite* è un cilindro retto di materia ben salda, il quale nel suo convesso tien rilevata una spira (Def. III. Pren.), ed aggirandosi intorno al proprio asse entra in un foro cilindrico scanalato di un'identica spira, onde va adattando la convessità di quella linea spirale sul cavo di quest' altra. Quel solido, cui si è praticato il detto foro cilindrico, domandasi *madrevite*: la leva, che fa rivolgere la vite, chiamasi *manubrio*, di cui l'intiera lunghezza è la stessa leva prolungata sino all'asse del cilindro, e dicesi *pane della vite* quella parte di un lato del cilindro, che resta tra due prossimi giri della spira.

§. 283. *Scol.* (fig. 36.) QT*t* è la vite, o la vite maschia, il foro cilindrico e spiralmente incavato nel pezzo AB è la madrevite: la retta PC è l'intiero manubrio, e l'altra Q*t* un pane della vite.

§. 284. *Def. LXXXII.* Il *cuneo*, che suol dirsi *bietta* o *zeppa*, è un prisma triangolare fatto di materia dura. I triangoli, che son le

basi del cuneo, sogliono essere isosceli, e la retta, che ne unisce i loro vertici, domandasi *taglio*, o *filo del cuneo*. Quel parallelogrammo del cuneo, ch' è opposto al taglio, si dice *dorso*, e gli altri due *facce del cuneo*. E l'angolo, che misura l' inclinazione di queste facce, dicesi *angolo del cuneo*.

§. 285. *Scol. I.* (fig. 37.) AC*cba* rappresenta un cuneo: i triangoli isosceli ACB, *acb* sono le sue basi: la retta C*c* n' è il suo taglio, e dei tre parallelogrammi A*ab*B, A*ac*C, B*bc*C il primo si domanda dorso del cuneo, e gli altri due sono le di lui facce.

§. 286. *Scol. II.* Percuotendosi gagliardemente il dorso del cuneo, il di lui taglio dee fendere quel corpo su cui insiste, ed in tal macchina la forza della percossa fa da potenza, e la tenacità del corpo fenduto da resistenza.

§. 287. *Scol. III.* Le macchine composte sono nella varietà pressochè infinite, ond' è impossibile di quì tutte desinirle. Ci ristringeremo soltanto alle tre seguenti, che sono insieme le più vantaggiose alla pratica, e le più insigni.

§. 288. *Def. LXXXIII.* Siavi un cilindro fortemente saldato ad un rocchetto e ad una ruota dentata, ma in modo che questi tre solidi abbiano un medesimo asse, intorno a cui sieno volubili tutt' insieme. Un' altro cilindretto abbia in simil guisa una ruota dentata ed un rocchetto; ma il suo asse sia parallelo a quello del primo, ed i denti della sua ruota stieno a contatto con quei del primo, e così in appresso vi sieno degli altri cilindretti. Si dirà questa macchina un *sistema di ruote dentate*.

§. 289. *Cor.* Questa macchina è un compo-

sto di tanti assi nella ruota, quanti sono i divisati cilindretti, i quali muovonsi colla seguente legge « La potenza aggirando la prima ruo-
» ta insiem ne aggira il di lei rocchetto: i denti
» di questo urtano in quei della seconda ruo-
» ta dentata, e la volgono insieme col suo roc-
» chetto: questo anima la terza ruota dentata,
» e così in appresso, finchè si animi la re-
» sistenza ».

§. 290. *Scol.* Nella fig. 39 vedesi un tal sistema di ruote dentate, ove le ruote sono AB, A' B', A'' B'', ec., ed i rocchetti *cb*, *c'b'*, *c''b''*, ec.

§. 291. *Def. LXXXIV. La vite perpetua* è quella, che non ha madrevite, ed aggirandosi urta colla sua spira nei denti di una ruota dentata, e la volge insieme col cilindro, cui si avvolge la corda traente un peso. Tal sarebbe la macchina esibita nella fig. 41.

§. 292. *Cor.* La vite perpetua inventata dall' immortale Archimede non è che un composto di una vite e di un asse nella ruota. Così (fig. 41.) FAOBR è la vite, ed NM*b*C l' asse nella ruota.

§. 293. *Def. LXXXV.* Il *polispasto* è un sistema di girelle, per le cui scanalature circonducesi una stessa corda, un capo della quale è legato all' armatura di esse, ed all' altro adattasi la potenza, che trae un peso legatone alla stessa armatura.

§. 294. *Scol.* Nella fig. 40 vedesi un polispasto, sebbene ve ne sieno degli altri di diversa forma.

§. 295. *Def. LXXXVI.* Chiamasi *verga immateriale* quella, ch' è ben dritta, rigida, e

sottile, nè ha poi peso, nè inerzia nelle sue parti.

§. 296. *Def. LXXXVII.* Una verga immateriale, che circolarmente si aggiri intorno ad un suo estremo, dicesi *raggio immateriale*, e questo immobile estremo chiamasi *centro di rotazione.*

§. 297. *Def. LXXXVIII. Ruota immateriale* è un sistema di raggi immateriali, che in uno stesso piano, ed intorno al loro comun centro di rotazione sono volubili tutt' insieme.

Tal sarebbe la ruota (fig. 44.) ABLD, i cui raggi AC, BC, LC, DC, ec. volgansi tutt' insieme intorno al punto C, e nello stesso piano ACD.

§. 298. *Def. LXXXIX.* Chiamasi *forza normale* quella, ch' è applicata all' estremo di un raggio della ruota, ma in guisa che la sua direzione stia nel piano della ruota, ed insista perpendicolarmente ad esso raggio.

§. 299. *Def. XC.* E si dirà *forza obbliqua* quella, cui manchi solamente l' ultima delle divisate condizioni, cioè che non abbia la sua direzione perpendicolare al raggio, ov' è applicata.

§. 300. *Def. XCI.* L' angolo, che forma la direzione di una forza col raggio della ruota, ov' è applicata, dicesi *angolo d' applicazione.*

§. 301. *Def. XCII.* Il *momento* di una forza applicata ad un raggio di una ruota immateriale è l' energia, che ella tiene a volger questa intorno al di lei perno.

§. 302. *Def. XCIII.* Più forze applicate ad una ruota diconsi *consenzienti*, se ciascuna di esse cerchi d' aggirarla per lo stesso verso. E si diranno *dissenzienti*, se alcune di esse cerchi-

no di volger la ruota per un verso, e l'altre per l'altro.

§. 303. *Scol.* Le direzioni delle forze, che agiscono in una ruota per volgerla intorno al suo perno, suppongonsi giacer tutte nel di lei piano: la qual condizione dovrà sempre intendersi, qualora non si dichiari il contrario. Quelle forze poi saran considerate come altrettanti pesi, affinchè la loro azione sia continua, ed uniforme.

§. 304. *Post. VI.* Se agli estremi di due raggi uguali di una ruota immateriale sieno perpendicolarmente applicate due forze uguali, che tendano a volger la ruota per opposte direzioni; questa resterà equilibrata, nè volgerassi per alcun verso.

§. 305. *Post. VII.* Se agli estremi dei raggi uguali di una ruota immateriale si applichino due forze normali consenzienti; il loro momento sarà quanto quello della somma di esse forze perpendicolarmente applicata all' estremo di uno di que' raggi, e per lo stesso verso di tali forze.

CAP. XVI.

DELL' EQUILIBRIO DELLE MACCHINE SEMPLICI.

PROP. LIV. LEMMA.

§. 306. *Il momento di una forza applicata all'estremo di un raggio di una ruota è proporzionale all' energia di essa forza, alla lunghezza del raggio, ed al seno dell' angolo di applicazione.*

Dim. Le forze applicate (fig. 42.) agli estremi A ed *a* de' raggi CA, C*a* della ruota AC*a*

si chiamino F ed f, e sieno M ed m i loro momenti nell' aggirarla. Le lunghezze de' mentovati raggi si dicano R ed r: e Φ e φ sieno gli angoli CAR, Car formati dalle rispettive direzioni delle forze F ed f co' raggi R ed r. Dal centro C della stessa ruota si calino CS, Cs perpendicolari sulle direzioni delle forze F ed f: e col centro C, e con un' intervallo maggiore di ciascuno di questi perpendicoli descrivasi nel loro piano il cerchio Rr, che seghi in R ed r le direzioni delle forze F ed f, e si congiungano i semidiametri CR, Cr. Finalmente si tronchino sulle stesse direzioni le parti RP, rp proporzionali alle forze F ed f, e da P e p si menino PL, pl perpendicolari sulle tangenti del cerchio in R ed r. Saranno tra se parallele le due rette CR, LP, come perpendicolari alla stessa RL, e 'l di loro angolo esterno CRS pareggerà l' interno LPR. Dunque i due triangoli rettangoli CSR, RLP saranno simili fra loro: e per la stessa ragione il saranno pure gli altri Csr, rlp.

Ciò posto. Suppongasi, che le rette CR, RA, Cr, ra sieno altrettante verghe rigide ed immateriali connesse tra loro, e coi raggi CA, Ca, e tutt' insieme volubili intorno a C, come se formassero una sola ruota, e le forze applicate in A ed a per AR, ed ar concepiscansi applicate in R ed r per le medesime loro direzioni RP, rp. Sarà chiaro, che la forza applicata in A per AP tanto valga ad aggirarne la ruota ACR, quanto applicata in R per RP. La qual cosa sarà anche vera rispetto all' altra forza f.

Si compia il parallelogrammo RQPL, e la

forza RP intendasi risoluta nelle due laterali RQ, RL. Sarà manifesto doversi elidere dalla fermezza del perno C la forza RQ, come quella, ch'è impegnata per la direzione della verga CR contro di esso: ond'ella in niente contribuisce a volger la ruota: laddove l'altra forza RL tutt'intera impiegasi ad aggirar la stessa ruota, ed è il momento M della forza F (§. 301.). Dunque sarà F ad M come RP ad RL, o pe' triangoli simili CSR, RLP, come CR a CS; e sarà quindi M. CR=F. CS.

Nello stesso modo si dimostra, che sia m. Cr=f.Cs. Dunque sarà M.CR:m.Cr::F.CS:f.Cs, o per esserne CR uguale a Cr, M:m:: (F : f) (CS:Cs). Ma la ragione di CS:Cs è altresì composta dalle ragioni di CA : Ca, e del seno di CAS a quello di Cas, cioè in ragion composta di R:r, e di sen.Φ : sen.φ. Dunque sarà M:m:: (F:f) (R:r) (sen.Φ : sen.φ). C. B. D.

§. 307. *Cor. I.* Supponendo M uguale ad m, dovrà essere di uguaglianza la ragione, che si compone da quelle di F:f, di R:r, e di sen.Φ: sen.φ; cioè dovrà essere FR sen.Φ =fr sen.φ. E quindi sarà F : f :: r sen.φ:R sen. Φ. Cioè *se le forze applicate agli estremi de' raggi di una ruota si equilibrino; le loro energie dovranno essere nella ragione inversa de' prodotti, che si hanno multiplicando le lunghezze dei raggi, ai cui estremi sono applicate, pei seni dei rispettivi angoli di applicazione.*

§. 308. *Cor. II.* E supponendo essere di uguaglianza una delle tre ragioni componenti di F:f, di R:r, e di sen. Φ : sen.φ, o quella, che n' emerga dalla composizione di due, dovranno risultarne altrettante verità particolari, che ciascuno può da se ritrarle.

§. 309. *Cor. III.* Tanto è il momento della forza F applicata all'estremo del raggio R della ruota sotto l'angolo Φ, quanto il momento della forza $\frac{FR\ \text{sen.}\Phi}{X}$ perpendicolarmente applicata all'estremo del raggio X.

Imperciocchè il momento della prima forza pareggia FR sen.Φ, e quello della seconda adegua $\frac{FR\ \text{sen.}\Phi}{X}$. X sen.90°, ch'è uguale ad FR sen.Φ.

§. 310. *Cor. IV.* Agli estremi de'raggi R, R', R'', ec. di una ruota sianvi sotto gli angoli Φ, Φ', Φ'', ec. applicate le forze F, F', F'', ec., che cerchino di aggirarla per uno stesso verso: mentre per l'opposto cerchino di aggirarla le forze f, f', f'', ec. applicate sotto gli angoli φ, φ', φ'', ec. agli estremi de'raggi r, r', r'', ec. *Sarà in caso di equilibrio*

$$FR\ \text{sen.}\Phi + F'R'\ \text{sen.}\ \Phi' + F''R''\ \text{sen.}\ \Phi'' + \text{ec} = fr\ \text{sen.}\varphi + f'r'\ \text{sen.}\varphi' + f''r''\ \text{sen.}\varphi'' + \text{ec.}$$

Imperciocchè supponendo, che all'estremo di un raggio, la cui lunghezza sia X si applichino insieme le forze normali (F. R. sen. Φ) : X, (F' R' sen.Φ') : X, (F'' R'' sen.Φ'') : X, ec. le cui direzioni giacciano nel piano della ruota, e l'aggirino per lo stesso verso delle prime forze F, F', F'', ec., sarà il momento di queste forze quanto il momento di quelle (§. 309.). E 'l momento delle altre forze f, f', f'', sarà eziandio uguale al momento delle forze normali (fr sen.φ) : X, ($f'r'$ sen.φ') : X, ($f''r''$ sen.φ'') : X, ec., supposto, che queste forze sieno applicate ad un

altro raggio uguale ad X, che abbiano le loro direzioni nel piano della ruota, e cerchino d' aggirarla per lo stesso verso delle forze f, f', f'', ec. Dunque in caso di equilibrio dovrà essere (§. 304.).

$$\frac{FR \text{ sen.}\Phi}{X}+\frac{F'R'\text{sen.}\Phi'}{X}+\frac{F''R''\text{sen.}\Phi''}{X}+\text{ec.}=$$

$$\frac{fr\text{ sen.}\varphi}{X}+\frac{f'r'\text{sen.}\varphi'}{X}+\frac{f''r''\text{ sen.}\varphi''}{X}+\text{ ec.},$$

cioè

$$FR \text{ sen.}\Phi+F'R'\text{sen.}\Phi'+F''R''\text{sen.}\Phi''+\text{ ec.}=fr\text{sen.}\varphi+f'r'\text{sen.}\varphi'+f''r''\text{sen.}\varphi''+\text{ec.}$$

PROP. LV. LEMMA.

§. 311. *Sia* (*fig.* 31.) ACB *una ruota fornita di due raggi disuguali* CA, CB, *ai di cui estremi agiscano per* AP *e* BF *le forze* P *ed* F; *ritrovare in caso di equilibrio con quanta forza n' è premuto il suo centro* C.

Sol. I. Le direzioni PA, FB delle forze P ed F intendansi prolungate, finchè s' incontrino nel punto D: ed essendo dati i tre angoli ACB, DAC, CBD del quadrilineo ACBD, si saprà il quarto BDA. II. Su i lati di questo angolo prendansi d' accanto al suo vertice le parti DM, DO proporzionali alle date forze P ed F, e compito il parallelogrammo DONM vi si conduca la diagonale DN. *Questa retta esprimerà la forza, onde il centro* C *n' è premuto.*

Dim. Si concepisca essere la retta CD un altro raggio immateriale, che alla ruota ACB si appartenga. Sarà manifesto, che il momento della forza P applicata in A per AP sia quanto quello, che essa vi farebbe applicata in D

per DP, e che tanto valga ad aggirar la ruota la forza F applicata in B per BF, quanto se fosse applicata all' estremo D della verga CD, agendovi per DB. Dunque in caso di equilibrio convien che queste forze P ed F, applicate all' estremo D della verga CD sotto gli angoli CDA, CDB non la rovescino nè a destra, nè a sinistra. Il perchè la forza, che si compone dalle stesse P ed F, dovrà dirigersi per DC, e combacerà colla DN forza media delle due DM, e DO, cioè di P ed F. Dunque la forza, onde n' è premuto il centro C, starà alla somma delle due forze P ed F, come il seno dell'angolo BDA alla somma de' seni degli angoli ADC, BDC (§. 98.). C. B. F.

§. 312. *Cor. I.* Se le direzioni AP, BF delle forze P ed F, che si equilibrano, sieno tra se parallele, cioè convergenti ad un punto infinitamente distante dal centro C della ruota; gli angoli ADB, ADC, BDC saranno infinitesimi, e ad essi saranno proporzionali i loro seni. Dunque il seno dell' angolo ADB dovrà pareggiare la somma de' seni degli angoli ADC, BDC. E quindi in tal caso *la forza premente il centro C sarà quanto la somma delle forze* P *ed* F.

§. 313. *Cor. II.* Le forze P ed F, cui per costruzione sono proporzionali le rette DM, DO, sono al par di queste (§. 98.) nella ragione dei seni degli angoli NDO, NDM, cioè (prendendo CD per raggio) come le perpendicolari CT, CS calate dal centro C di rotazione sulle direzioni delle forze F e P.

§. 314. *Cor. III. Dunque se due forze comunque applicate agli estremi dei raggi di una ruota si equilibrino; le di loro energie*

saranno inversamente come i perpendicoli calati dal centro della ruota sulle direzioni di esse forze. E questo vuolsi intendere anche pei raggi curvilinei di una ruota.

§. 315. *Cor. V.* La forza premente il centro C equivale alle due P ed F; imperciocchè quella è dinotata dalla diagonale DN del parallelogrammo DONM, e queste da' di lui lati DM, DO; dunque *le tre rette* CD, AP, BF, *che sono le direzioni delle stesse forze, dovranno tutte e tre concorrere ad uno stesso punto, e giacerne in uno stesso piano* (§. 98.).

PROP. LIV. TEOR.

§. 316. *La potenza, e la resistenza per equilibrarsi nella leva* (*fig.* 30 *n.*° 1.° 2.° *e* 3.°) ACB, *ove sono applicate, debbono essere nell' inversa ragione delle di lei braccia* CB, CA, *e de' seni de' rispettivi angoli* PBC, RAC *di applicaziozione.*

Dim. Le braccia CB, CA della leva ACB, o ch' ella sia dritta, o angolare, si chiamino R ed *r*: gli angoli d'applicazione PBC, RAC dicansi Φ e φ, e sia la potenza uguale ad F, la resistenza uguale ad *f*. Sarà manifesto coll' identica dimostrazione del §. 307., che stia F : *f* :: *r* sen.φ : R sen. Φ. G. B. D.

§. 317. *Cor. I.* Suppongansi tra se uguali i seni degli angoli d' applicazione Φ e φ. Dovrà stare F : *f* :: *r* : R; cioè *la potenza e la resistenza, applicate agli estremi delle braccia di una leva per direzioni, che colle stesse braccia facciano angoli, che abbiano uguali seni, debbono essere nell' inversa ragione delle lunghezze di queste per equilibrarsi.*

§. 318. *Cor. II.* E può anche stabilirsi, che *la potenza e la resistenza per equilibrarsi in una leva debbano essere nella reciproca ragione delle perpendicolari calate dal centro di moto sulle loro direzioni* (§. 314.).

§. 319. *Cor. III.* Ed applicandosi più forze ad un braccio di una leva, ed altre quante si vogliano all' altro, non sarà malagevole intendere le condizioni dell' equilibrio di quelle forze e di queste sol che si sappia la regola proposta nel §. 310.

§. 320. *Cor. IV.* E da ciò che si è rilevato nel §. 311. sarà facile valutare la pressione, che soffre il sostegno di una leva, cui sieno applicate più forze tra se equilibrate.

§. 321. *Scol. I.* Gli *altaleni* adattati ad attignere l' acqua dai pozzi poco profondi, gli *stantuffi* delle trombe idrauliche, i *remi*, gli *alberi*, ed i *timoni*, onde conduconsi le barche, non son che leve dritte, e sono angolari i *martelli*, qualora colla parte biforcata impieggansi a svellere dei chiodi saldamente fitti nei corpi. Le *forbici*, e le *cisoje* son leve dritte e geminate, avendo per comun sostegno il loro nodo. E le *tenaglie*, e le *morse*, onde stringiamo i corpi son leve angolari geminate, ove il comun sostegno è nel nodo, che le unisce. Ma chi può mai le varie leve noverare, che per renderne agevoli tanti usi, Natura o Arte a noi ne ha date? Basta indicare, che la maggior parte delle ossa del nostro corpo, destinate ad agevolare certe funzioni della nostra vita, non son che leve di terzo genere, ove fan da potenze i muscoli attaccati alle medesime ossa d'accanto ai loro centri di moto. Ed un Anatomico,

cui non incresca spiar la compage di tali solidi colla luce della Statica, potrà conoscere per iscienza qual meccanismo è in noi, e qual magistero si rileva del Mastro Eterno. Il nostro Giovanni Alfonso Borelli, che su questo argomento si è distinto nella sua Opera intitola *De motu Animalium*, tra gli altri Teoremi, che rapporta, uno è il seguente: *La forza del muscolo bicipite e del brachièo, quando tutto il braccio di un giovane robusto sia orizzontalmente disteso, ascende a* 560 *libbre*. Imperciocchè il peso, che questo giovane può in tal guisa sostenere colle sue dita, è di libbre 28 (computandovi il momento del peso dell' antibraccio), e la distanza o la perpendicolare calata dal centro di moto sulla direzione di questa potenza è la vigesima parte della lunghezza dell' antibraccio e della mano, come si ha dall' Anatomia. Dunque sarà la divisata forza muscolare a 28 libbre come 20 ad 1. Il perchè essa forza dovrà pareggiare 20. 28 libbre, o sia 560 libbre.

§. 322. *Scol. II.* Quei due usitatissimi strumenti, coi quali sogliamo saggiare i pesi dei corpi e ragguagliarli, non sono altro che leve. Il primo, che dicesi *bilancia*, è una leva di primo genere, le cui braccia sono uguali nella lunghezza e nel peso, ed han pendenti dai loro estremi due coppe uguali per vi si metter dentro quei corpi, che si vogliono pesare. E poichè in questa macchina l' equilibrio nasce dall' equalità delle masse poste in amendue le coppe; vi vogliono tanti contrappesi, quanti diversi pesi piacciane scandagliare nei corpi. Ma l' altra macchina, che *stadera* si domanda, è assai più comoda e vantaggiosa della bilancia. Ella è altresì

una leva di primo genere, ma di disuguali braccia. Dal più corto pende una coppa da imporvisi quei corpi, che si vogliono pesare, e pel più lungo scorre innanzi ed in dietro un certo peso, che dicesi *romano* o *piombino*, discostandosi ed avvicinandosi alla trutina, ov'è il centro di rotazione. Ed i pesi dei corpi, che pongonsi nella coppa successivamente, non son valutati da altrettanti contrappesi, com'è nella bilancia, ma dalle varie distanze, cui il romano dovrà allontanarsi dalla trutina per equilibrarli.

§. 323. *Scol. III.* Or affinchè una bilancia sia perfettissima esigesi; 1.° che sieno equidistanti dal centro di rotazione quei due punti delle sue braccia, onde pendono le coppe, 2.° che ciascuna di queste distanze sia la massima, che possa avere ciascun braccio della bilancia senza punto incurvarsi; 3.° che la retta, la quale unisce quei due punti, debba restar bisecata dalla perpendicolare abbassatale dal centro di rotazione; 4.° e finalmente che le coppe vuote debbano mantener la bilancia in sito eretto.

PROP. LVII. TEOR.

§. 324. *Si dà l'equilibrio nell'asse nella ruota, se la potenza applicata all'estremo di un raggio della ruota stia a quel peso, che con tal macchina vuol trarsi, come il semidiametro dell'asse alla perpendicolare, che dal centro della ruota si abbassa sulla direzione della potenza.*

Dim. Sia (fig. 32.) EIGHLF l'asse nella ruota, e P la potenza, che applicata all'estremo del raggio CP di essa cerchi di volgere colla

ruota il cilindro EGHF annessole, e di avvolgergli la corda NR traente il peso R. Pel punto N, che è l' ultimo di quei, che la corda tiene adattati sul cilindro EGHF, intendasi condotto il lato cilindrico NA, che incontri in A la ruota, dal cui centro al punto A si tiri la retta CA. E poi si concepisca il peso R trasportato in A, di dove agisca per una retta parallela alla NR: imperciocchè il peso e la rigidezza dell' intiera macchina ne permette riunire insieme i punti N ed A in quanto all' effetto, che vi cagionano la potenza e la resistenza.

Ciò posto. L' intiera macchina si vedrà ridotta alla leva angolare PCA, ove in C risiede il punto di appoggio, ed agli estremi P ed A delle sue braccia CP, CA sono applicate le forze P ed R, quella secondo qualunque direzione, e questa perpendicolarmente alla CA. Dunque in virtù del §. 318. dovrà succedervi l'equilibrio, se stia P ad R come il semidiametro CA del cilindro alla perpendicolare, che dal punto C si abbassa sulla direzione della potenza P. C. B. D.

§. 325. *Cor. I.* Dunque se la direzione della potenza sia perpendicolare al raggio della ruota, si darà l' equilibrio nell' asse nella ruota, se stia la potenza al peso come il semidiametro del cilindro al semidiametro della ruota.

§. 326. *Cor. II.* In questo Teorema si è tacitamente supposto, che la corda, cui è legato il peso da trarsi non abbia gravità ne spessezza. Ma volendosi tener conto di tali cose, converrà supporre, che la resistenza agisca per la direzione dell' asse di quel cilindro, in che conformasi la fune, e con ciò il tema della pre-

cedente Proposizione potrà modificarsi nel seguente modo. *Si dà l'equilibrio nell' asse nella ruota se la potenza applicata all' estremità di un raggio della ruota stia al peso del corpo, che si vuol trarre, ed a quello della corda, come la somma dei semidiametri dell' asse e della corda alla perpendicolare, che dal centro della ruota si abbassa sulla direzione della potenza.*

§. 327. *Scol.* Molte macchine, che utilmente usiamo in tante congiunture, non sono che assi nella ruota, tutto che nel primo aspetto non pajan tali. Così il *succhiello*, onde foriamo i corpi, gli *argani*, e le *burbere*, con cui traggonsi dei gran pesi, il *timpano calcatorio* adattato a varar le barche, ed a nettare i porti, le *ruote dentate*, ed i *rocchetti* non sono che assi nelle ruote.

PROP. LVIII. TEOR.

§. 328. *Nella carrucola stabile la potenza dee pareggiare la resistenza per equilibrarla. E nella mobile la potenza equilibrasi col peso, che si vuol trarre, se stia la potenza al peso come il raggio della girella alla sottesa di quel di lei arco su cui n'è incurvata la fune traente il peso.*

Dim. Par. I. Basta condurre dal centro (fig. 33.) C della girella stabile AOB ai punti B ed A, ove la fune tocca il perimetro di essa, le rette CA, CB per intendere chiaramente non essere questa macchina, che una leva di uguali braccia, come ACB, alle cui estremità sono perpendicolarmente applicate la potenza P e 'l

peso R. Dunque per darvisi l'equilibrio convien che P pareggi R.

Par. II. La retta (fig. 34.) BA sia la sottesa dell'arco AtB della girella mobile, sul quale n'è adattata la fune, che trae il peso. Sarà chiaro potersi ridurre questa girella ad una leva di secondo genere, ove in A stia il sostegno premuto per AQ, ed ove la potenza agisca per BP, e per Rr la resistenza. Sicchè da quello, che si è dimostrato nel §. 311, le tre rette AQ, BP, r R debbono trovarsi in uno stesso piano, e raccorsi tutti e tre in uno stesso punto, affinchè in tal macchina si avveri l'equilibrio tra P ed R. Sia N cotesto punto. Saranno le due rette NA, NB tra se uguali, come tangenti menate da N sulla circonferenza di AtB. Dunque il triangolo ANB sarà isoscele, e la segante centrale NC, che biseca l'angolo delle riferite tangenti, dovrà bisecare ad angoli retti la BA base di esso triangolo. E congiunti i semidiametri CA, CB, l'angolo ACr sarà eziandio uguale all'altro BCr, e ciascuno di essi quanto quello, che nel segmento AOB si contiene (§. 20 El. III.), cioè a dire uguale all'angolo ABF (32 El. III.).

Or essendosi quì da ultimo dimostrato essere l'angolo acuto ACr quanto l'altro ABF; se dal punto A conducasi AF perpendicolare sulla BN, dovrà il triangolo rettangolo ACr trovarsi equiangolo e quindi simile all'altro ABF, che ne risulta. Dunque starà Ar : AC :: AF : AB, e permutando Ar : AF :: AC : AB. Ma per l'equilibrio della leva ArB dee stare (§. 318.) la potenza P alla resistenza R come Ar : AF. Dunque dovrà esserne altresì P : R :: AC : AB. C. B. D.

§. 329. *Cor.* Che se nella girella mobile AOB si trovino tra se paralleli i tratti AQ, BP della fune PB*t*AQ, la retta AB, che passa pei contatti A e B, dovrà attraversare il circolo AOB pel centro, ed essergli un diametro. Dunque in tal caso *starà la potenza al peso come il semidiametro della girella al di lei diametro*, cioè *come* 1 : 2.

PROP. LIX. TEOR.

§. 330. *Se il peso (fig. 16.) P posto sul piano obbliquo QC sia tirato all' insù dalla potenza F, la cui direzione PX giaccia nello stesso verticale, ov' è la lunghezza del piano; sarà in caso di equilibrio la potenza al peso com' è il seno dell' obbliquità del piano al coseno dell' angolo sotto cui s' inclina al piano la direzione della potenza.*

Dim. Per P distendasi la verticale PL, che incontri il piano orizzontale AC nel punto O; e sulle rette PO, PX si tronchino le parti PL, PF proporzionali al peso del corpo P, ed alla potenza, che per PF lo ritiene. Di poi dai punti L ed F si abbassino le LM ed FE perpendicolari al piano QC, le quali dovranno cadere sulla PT di lui lunghezza, e compiansi i rettangoli PMLN, PGFE. Sarà la forza PL equivalente alle due PM, PN, e la PF alle altre due PE, PG. E dovrà essere in caso di equilibrio la forza PM uguale e contraria all' altra PE. Imperciocchè se è possibile, sien disuguali coteste forze, e PD dinoti la direzione e l' eccesso della maggiore di esse sulla minore. E supposto, che le altre due forze PG, PN siene

uguali, onde per esserne opposte si debbono elidere, il corpo P animato dalla sola forza PD dovrà muoversi per la direzione PE, per la quale anche vi si condurrebbe quando la forza PN vogliasi maggiore della sua opposta PG. Imperciocchè l'eccesso di quella su questa resterebbe distrutto dalla fermezza del piano QC, onde nel corpo P non sarebbe operosa, che la sola forza PD. E finalmente se vogliasi la forza PG maggiore dell' altra PN, e che la PH dinoti la direzione e l'eccesso della maggiore sulla minore; il corpo P sarà insieme animato dalle due forze PD, PH, onde dovrà condursi per una media direzione. Le quali cose ripugnando alla natura dell' equilibrio ne fan concludere, che la forza PM debba pareggiare l' altra PE.

Ciò premesso. Poichè sta PF : PE come il raggio al coseno dell' angolo FPE, e PM : PL, ovvero PE : PL come il seno dell' angolo PLM, o del suo uguale PTO al raggio ; per equalità perturbata dovrà stare pure PF : PL :: sen. PTO cos. FPE. Dunque si dà l' equilibrio nel piano inclinato, se la potenza stia al peso, che essa sostiene, come il seno dell' obbliquità del piano al coseno dell' angolo sotto cui s' inclina al piano la direzione della potenza. C. B. D.

§. 331. *Cor. I.* Se la direzione della potenza sia parallela alla PT lunghezza del piano inclinato, il coseno dell' angolo FPE sarà quanto il raggio. Ed in tal caso per *l' equilibrio convien, che la potenza F stia al peso P come il seno dell' obbliquità del piano al raggio.*

§. 332. *Cor. II.* E se la direzione della potenza, che ritiene il peso P sul piano QC, s'inclina a questo piano quanto è l' angolo PTO

dell' obbliquità dello stesso piano; *sarà in caso di equilibrio la potenza al peso come il seno dell' obbliquità del piano al di lei coseno.*

PROP. LX. TEOR.

§. 333. *Nella vite si dà l' equilibrio, se la potenza perpendicolarmente applicata all' estremo del manubrio stia alla resistenza come un pane della vite alla circonferenza, che ha per raggio l' intera lunghezza del manubrio.*

Dim. Sia (fig. 36.) PR il manubrio di questa macchina, al di cui estremo P siavi applicata una forza normale per la direzione Pp nel piano della sezione FRr parallela alla base della spira, e l' altro estremo R descriva col suo moto una spira, di cui l' archetto QS siane una parte infinitesima. Intanto il manubrio PR si distenda insino all' asse del cilindro, ov' è rilevata la spira, e l' intiero peso del corpo, che spingesi con della vite, cioè la resistenza di questa macchina, intendasi raccolta nel corpicciuolo R, il quale posando sul piano obbliquo RQ siavi ritenuto dalla sola forza F per FR parallela a Pp.

E poichè l' angolo FRQ adegua l' acutezza della spira, cioè l' inclinazione del piano QRS all' orizzonte; sarà chiaro, che per darsi l' equilibrio tra la potenza F e 'l peso R debba stare F ad R come il seno al coseno dell' acutezza della spira (§. 332.), cioè come un pane della vite alla circonferenza della base del cilindro, ov' è rilevata la spira (Pren. IX.). Ma per darsi l' equilibrio tra le due forze F e p perpendicolarmente applicate ai punti P ed R della leva PC dee stare p ad F come CR a CP (§. 318.), o come la

circonferenza del raggio CR a quella del raggio CP. Dunque le tre grandezze, potenza p, forza F, e peso R sono in proporzione perturbata colle altre tre, cioè un pane della vite, la circonferenza del raggio CR, e la circonferenza del raggio CP. Quindi per equalità perturbata si avrà p ad R come un pane della vite alla circonferenza di CP. Vale a dire, che nella vite ec. C. B. D.

§. 334. *Scol.* Tra tutti gl' istrumenti meccanici ritrovati dall' uomo per i suoi vantaggi sembra, che la vite debba tenere il primo luogo, come quella, che non solo è potente a stringere con gagliardia certi corpi, ed a spingere ingenti pesi, ma occupa pochissimo luogo a far quegli effetti, che altri strumenti non farebbero se non ridotti in gran macchina. Sovvengavi, che i torchi, onde si spreme il vino da grappi d' uve già calcati, e l' olio dalle ulive, non son che viti: e di tal genere son pure le morse dei fabbri, i torchi dei librai, ed altre simiglianti macchine.

PROP. LXI. LEMMA.

§. 335. *Sia* (*fig.* 38.) FCG *una leva angolare di uguali braccia, a' cui estremi sieno applicate le potenze normali per* GD, *ed* FD, *che si pareggino; il sostegno* C *sarà premuto per una retta, che biseca l' angolo della leva, e tal forza premente starà alla somma delle forze normali, com' è il seno della metà dell' angolo della leva al raggio.*

Dim. Le direzioni delle forze normali si prolunghino, finchè incontrinsi nel punto D, di

dove si tiri la DC all' angolo della leva, e si unisca la GF. Sarà CD^2 uguale a CG^2 con GD^2, e lo stesso CD^2 uguale a CF^2 con FD^2. Dunque i due quadrati di CG e di GD debbono essere uguali ai due quadrati di CF e di FD. Onde togliendo i quadrati di CG e di CF, che sono uguali, dee restarvi il quadrato di GD uguale a quello di FD, e con ciò dev' essere GD uguale ad FD. Il perchè i due triangoli CGD, CFD avendo i due lati CG, GD rispettivamente uguali ai due lati CF, FD, ed il lato CD di comune, debbono avere l' angolo GCD uguale all' altro FCD. Ma per esserne CG uguale a CF, l' è pure l' angolo CGF uguale all' altro CFG. Dunque i triangoli CGH, CFH, che hanno gli angoli CGH, HCG uguali agli angoli CFH, FCH, debbono avere il rimanente angolo CHG uguale al rimanente angolo CHF, e quindi ciascuno di questi angoli dev' essere retto.

Si prenda ora la HE uguale ad HD, e si congiungano le due GE, ed EF. Dovrà essere (4. El. I.) GE uguale ad FD, ed FE uguale a GD. Ma l' è GD uguale a DF. Dunque la figura GDFE dev' essere un rombo. Il perchè se colle rette GD ed FD si dinotino le forze uguali perpendicolarmente applicate agli estremi dei raggi uguali CG, CF della leva angolare GCF, la diagonale DE del parallelogrammo GDFE dovrà dinotarne la forza, che da esse si compone, la cui direzione divide per metà l' angolo FCG della leva. Ma le due forze GD, DF serbano all' altra DE la ragione di GD a DH (15. El. V.), e sta (8. El. VI.) GD a DH come CD a DG, o come il raggio al seno della metà dell' angolo GCF della leva. Dunque la somma delle

forze perpendicolarmente applicate agli estremi di due raggi uguali CG, CF della leva sta alla forza, onde il sostegno C ne vien premuto, come il raggio al seno della metà dell'angolo della leva. C. B. D.

§. 336. *Cor.* Le forze uguali applicate perpendicolarmente agli estremi delle uguali braccia CG, CF della leva angolare si concepiscano agire da G verso D, e da F verso D rispettivamente. Sarà chiaro, che la forza, la quale ne preme il sostegno C debba agire da C verso D. Intanto si prolunghino le due verghe CG, CF in A e B, finchè sieno CA, CB tra se uguali, e si congiunga la AB, la quale convenga in R colla CF protratta. Finalmente si concepisca una forza premerne il punto R da R verso C con una energìa uguale a quella, onde lo stesso sostegno ne vien premuto da C verso R dalle due forze, che agiscono per GD ed FD. Sarà chiaro doversi questa forza equilibrare colle due GD, FD, ancorchè la leva non istia impiantata sul sostegno C. Il perchè dovrà stare *la somma delle forze, che agiscono per* GD, FD *alla forza, che agisce per* RC, *come il raggio al seno della metà dell'angolo* GCF.

PROP. LXII. TEOR.

§. 337. *Se il cuneo si consideri come la leva descritta nel precedente Lemma; sarà in caso di equilibrio la tenacità del corpo fenduto dal cuneo a quella forza normale, che dee premere il dorso di tal macchina, come il raggio al seno della metà dell'angolo del cuneo.*

Dim. Il cuneo ACB fendendo col suo ta[illegible]o il solido LM abbiavi intrusa la parte GCF, [illegible]entre le parti dello stesso solido staccate dal contatto loro ne premano amendue le facce [illegible] tal macchina. Il triangolo isoscele ACB sia una sezione del cuneo parallela a ciascuna base di [illegible]so, e nella parte GCF dello stesso triangolo, la q[illegible]ale stia immersa nel solido LM, si meni, c[illegible]e ne piaccia, la GF parallela ad AB. Intanto su[illegible]pongasi, che le parti staccate dal cuneo agiscano solo in G ed F con forze uguali e perpendicolari ai lati CA, CB del divisato triangolo. Sarà chiaro, che per equilibrare le forze GD, FD ne abbisogni un' altra, che agisca per la retta RC, la quale divida per metà l' angolo ACB, e che le medesime due forze le serbino quel rapporto, che ha il raggio al seno dell' angolo ACB. Dunque si darà l' equilibrio in questa macchina, se la tenacità del corpo LM stia alla forza del peso R, che dee premere il dorso del cuneo per fenderne quel corpo, come il raggio al seno della metà dell' angolo del cuneo. C. B. D.

§. 338. *Cor.* Di quì si raccoglie, che tanto più facile ne riesca fendere un corpo, quanto in parità di altre circostanze è più acuto l' angolo del cuneo, che si adopera.

§. 339. *Scol. I.* Tutti quegli strumenti, coi quali sogliamo fendere, tagliare, e forare varie materie, come le *asce*, le *scuri*, le *zappe*, i *coltelli*, le *spade*, i *chiodi*, ec. non sono altra cosa che cunei.

§. 340. *Scol. II.* Qual differenza non vi è tra i corpi per la varia coesione delle loro parti, pel vario modo, con cui resistono ad ogni altro, che vi s' intrude? Sovvengavi, che per tal

ragione sogliamo classificarli in *molli*, *duri tenaci*, *fissili*, *elastici*, ec., e che gl' individui di ciascuna loro classe non abbiano nello stesso modo ed in pari grado quella qualità, che li distingue, e che questa neppur si rinvenga uniformemente ripartita in uno stesso corpo. Ma prescindendo da tali anomalie, chi può mai la forza percuziente colla tenacità del corpo fenduto ragguagliare? Quindi è che si divieta proporre un Teorema assoluto sull' equilibrio del cuneo, e solo può rinvenirsi condizionalmente, spargendo cioè alquante supposizioni nel tema e nella dimostrazione di esso.

C A P. XVII.

DELL' EQUILIBRIO DELLE MACCHINE COMPOSTE.

§. 341. *Def. XCIV.* In una macchina dicesi *esponente dell' equilibrio* quella ragione, che dee serbare la potenza alla resistenza per equilibrarvisi.

Così l' esponente dell' equilibrio nell' asse nella ruota è *la ragione del raggio del cilindro al semidiametro della ruota* (§. 325.). Nel piano inclinato *esso è la ragione del seno dell'obbliquità del piano al coseno dell' angolo sotto cui s' inclina al piano la direzione della potenza* (§. 330.). Ma in appresso l' esponente dell' equilibrio in qualunque macchina semplice ne sarà indicato per la frazione $r{:}R$.

PROP. LXIII. TEOR.

§. 342. *L' esponente dell' equilibrio in una macchina composta è il prodotto degli esponenti dell' equilibrio di tutte quelle macchine semplici, da cui essa n' è combinata.*

Dim. Suppongasi, che A, B, C sieno quelle macchine semplici, dalla combinazione delle quali siasi formata la macchina composta M, e che la prima di quelle venga immediatamente animata dalla potenza F, laddove l' altra B sia animata da A, e poi da B l' ultima C, che immediatamente agisca sulla resistenza P. Intanto gli esponenti dell'equilibrio delle macchine semplici A, B, C esprimansi per le rispettive ragioni di $r:R$, di $r':R'$, e di $r'':R''$.

E poichè l'equilibrio in una macchina composta non può aver luogo, se non vi sia eziandio in ciascuna di quelle macchine semplici, da cui essa è combinata; egli è chiaro, che nella macchina composta dalle tre semplici A, B, C per darsi l' equilibrio tra la potenza F e la resistenza P; debbano essere in equilibrio le tre macchine semplici A; B, C. Dunque la renitenza, che la seconda di queste macchine oppone al movimento, si può supporre qual resistenza, che applicata alla macchina A si equilibra colla potenza F. Onde dinotando con X tal resistenza dovrà (§. 68. Leg. III.) essere X quella forza, che applicata alla macchina B si equilibra colla resistenza, che la macchina C oppone al movimento. Il perchè se per X' si dinoti la resistenza, che da C si oppone B, dovrà essere (§. 68. Leg. III.) X' quella forza, che applicata alla macchina C si equilibra col

peso P. Dunque dee stare $F:X::r:R$, $X:X'::r':R'$, ed $X':P::r'':R''$, e con ciò $F:P::(r:R)\,(r':R')\,(r'':R'')$. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che se le macchine semplici, da cui è combinata la macchina composta, sieno più di tre, l'esponente dell'equilibrio di essa debba pareggiare il prodotto degli esponenti dell'equilibrio di tutte quelle macchine semplici. C. B. D.

PROP. LXIV. TEOR.

§. 343. *Nel sistema di ruote dentate vi sarà l'equilibrio tra la potenza* F *e'l peso* P, *se stia* F *a* P *come il prodotto dei raggi dei rocchetti al prodotto dei raggi delle ruote.*

Dim. Questa macchina è un aggregato degli assi nelle ruote, i quali sono (fig. 39.) *cb* BA, *c'b'*B'A', *c''b''*B''A'', ec. Dunque chiamando r, r', r'', ec. i rispettivi raggi de' rocchetti, ed R, R', R'', ec. quei delle ruote; saranno gli esponenti dell'equilibrio nelle macchine *cb*BA, *c'b'*B'A', *c''b''*B''A'', ec. rispettivamente uguali ad $r:R$, $r':R'$, $r'':R''$, ec. (§. 325.). Dunque (§. 342.) in tal sistema di ruote dentate succederà l'equilibrio, se stia $F:P::r\,r'r''$ ec. : R R R'' ec. C. B. D.

PROP. LXV. TEOR.

§. 344. *Si avvera l'equilibrio nella vite perpetua, se la potenza* F *stia al peso* P, *che vi si trae, come il semidiametro (fig. 41.)* C *b del cilindro al manubrio* AF *multiplicato pel numero de' denti della ruota* NMB.

Dim. Pongasi uguale a π un pane di questa

vite; e con R ed r si dinotino i semidiametri della ruota dentata e del cilindro, e le circonferenze di questi raggi sieno rispettivamente uguali a C e c. In oltre si chiami g la lunghezza del manubrio, G la di lui periferia, ed n il numero de' denti della ruota.

E poichè questa macchina è un composto della vite FABR e dell'asse nella ruota NBMCb, e l' esponente dell' equilibrio della prima di queste macchine (§. 333.) è π : G, laddove quello dell' altra è r : R, o pure c : C; sarà (§. 342.) F:P::πc:CG, o pure F:P::(π:C) (c:G). Ma la ragione di π:C pareggia quella di 1:n, e la ragione di c:G adegua l' altra di r:g. Dunque dev' essere F:P::(1:n) (r:g), cioè F:P::r : ng. C. B. D.

PROP. LXVI. TEOR.

§. 345. *Nel polispasto si dà l' equilibrio; (fig. 40.) se la potenza* F *stia al peso* P *come l' unità al numero dei tratti della fune, che vi si circonduce per le girelle, diminuito dell' unità.*

Dim. I tratti BR, AQ ec. della fune SNTQ ABRMF sono ugualmente stirati dal peso P, e si giacciono tutti paralleli tra loro: dunque la tensione di ciascuno di essi starà al peso P, come l' unità al numero de' tratti della fune tesi dalla resistenza P. Or in caso di equilibrio la potenza F dee uguagliare la tensione del solo tratto RB: dunque in tal caso starà la potenza F al peso P come l' unità al numero dei tratti della fune, che vi tende lo stesso peso P. C. B. D.

§. 346. *Cor.* In un sistema di girelle mobili, ciascuna delle quali sia circondotta da una fune distinta da quelle delle altre, e di cui i tratti sono paralleli tra loro, vi si darà l'equilibrio tra la potenza F, che le anima, e 'l peso P, che vi si trae, se stia $F:P::1:2^n$; supposto che n dinoti il numero delle girelle mobili. La qual cosa raccogliesi agevolmente della Prop. LXIII.

CAP. XVIII.

DELLE RESISTENZE, CHE SOFFRONO LE MACCHINE ALLORA CHE SON PROSSIME A MUOVERSI.

§. 347. Se le materie, da cui le macchine son costruite, fossero inflessibili, prive di peso, e perfettamente levigate, e fossero sommamente flessibili le corde, che spesso debbono adoprarsi per trasmettere alla resistenza l'azione della potenza; la teorica dell' equilibrio delle macchine rapportata nei due prec. Cap. sarebbe sufficiente per determinare in ciascun caso qual forza vi bisogna per contrabbilanciare una data resistenza. Onde per poco, che si aumentasse l'energia della potenza, si dovrebbe porre in moto la resistenza. Ma poichè quelle condizioni non han luogo in Natura; l' è mestieri valutare per mezzo di accurati sperimenti le principali resistenze, che sorgono in una macchina, la quale voglia porsi in movimento.

§. 348. In ogni macchina in moto si debbono principalmente considerare due specie di resistenze. La prima di queste vien prodotta dalle superficie, che strisciano le une sulle altre, le

quali contenendo dei pori debbono avere alcune parti prominenti ed altre incavate. Onde le prominenze delle une adattandosi nelle cavità delle altre producono uno ostacolo alla potenza, che cerca di porre in movimento la macchina. A questa resistenza dassi il nome di *attrito*, di *frizione*, ovvero di *stropicciamento*. La seconda di tali resistenze vien prodotta dalla forza più o meno poderosa, colla quale scambievolmente si attraggono due corpi, che hanno le superficie più o meno ben levigate e combacianti. Una tal resistenza chiamasi *adesione*. Ma poichè 1° le sinuosità e le prominenze dei differenti corpi variano all'infinito per le diverse dosi di calore e di umido, onde di tempo in tempo impregnasi ciascuno di essi; 2° la pressione dei corpi, che si stropicciano, non è sempre la stessa, nè uniformemente da per ogni dove ripartita; 3° ed al rendersi più levigate le superficie dei corpi, che si stropicciano, più gagliarda si eccita quella forza, onde scambievolmente si attirano; l'è chiaro, che niun Analista potrà calcolare rigidamente ed a *priori* quelle resistenze cagionate in una macchina dalle di lei parti, che stropicciansi, ed assegnarvi delle regole sicure ed universali. E se sperimentando consultisi Natura, niuno potrà mai rendere generali i risultamenti di sperienze sì ristrette e particolari. Non di meno giova quì rapportare quegli esperimenti, dai quali si possono trarre delle regole, che nella pratica debbono essere di guida. Ma poichè al crescere dell'attrito diminuisce l'adesione, e viceversa; l'è manifesto non potersi queste due resistenze, che sorgono in ogni macchina, separatamente

determinare. Onde in appresso col nome di attrito vuolsi intendere lo sforzo, che dee farsi per vincere l'attrito e l'adesione. Ed ecco le sperienze dirette a determinare l'attrito di un corpo, che striscia sopra un altro.

§. 349. *Esperienza.* Il Buffingero nel Vol. II degli Atti Antichi di Pietroburgo ha proposto il seguente sperimento per determinare lo stropicciamento di un corpo sopra un altro. Egli determina coll' esperienza l'angolo φ della quiete, cioè la massima inclinazione del piano obbliquo (fig. 17.) AC, su cui possa reggersi il solido MENR senza discenderne per la lunghezza AC di esso. Onde in tal caso la frizione del corpo colla superficie del piano obbliquo dovrà pareggiare quella forza, che all' ingiù lo spinge per la lunghezza del piano. Or essendo il raggio trigonometrico 1 a sen.φ come il peso P del corpo alla forza, colla quale esso cerca di scendere per la lunghezza del piano; sarà tal forza espressa da P sen.φ, che dovrà pareggiare l'attrito. Ma sta pure il raggio trigonometrico 1 a cos.φ come il peso P del corpo proposto alla pressione, che esso fa sul piano declive. Dunque dev'essere tal pressione uguale a Pcos.φ. Il perchè dee stare il peso di un corpo, che striscia sopra un piano ben levigato all' attrito nella ragione di Pcos.φ : Psen.φ, ovvero di 1 : tang.φ, e dalle sperienze si rileva, che l'angolo φ varia secondo che variano le qualità dei corpi, che si stropicciano, le levigatezze delle superficie di essi, e la velocità, colla quale il corpo stropicciante si muove. Intanto da' risultamenti di tali sperienze, in diverse guise modificate, le seguenti regole si possono stabilire.

§. 350. Regola I. *L' attrito di un corpo, che va stropicciando una superficie alquanto pulita e liscia, adegua la pressione di esso multiplicata per un fratto f, ch' è costante nelle diverse pressioni, purchè non sieno maggiori di 500 libbre.*

§. 351. *Cor.* L' attrito di uno stesso corpo stropicciante una medesima superficie non cangia punto di energia, quantunque si accresca o si diminuisca la di lui parte, che vi strofina. Poichè aumentandosi le parti della superficie stropicciante, debbono diminuire di energia le forze, colle quali esse ne premono la superficie sulla quale poggiano, e viceversa. Ma qualora il peso del corpo stropicciante non è molto grande, coll' aumentare l'estensione della superficie stropicciante, si aumenta il numero dei punti di contatto delle due superficie, e quindi cresce l' adesione. Onde in tal caso l' attrito scorgesi alquanto maggiore facendo strisciare il corpo colla superficie più estesa, che coll' altra meno estesa, molto più se tra le superficie, che si stropicciano, vi sia uno strato di qualche materia untuosa.

§. 352. Regola II. *L' attrito di un corpo, che va stropicciando una superficie alquanto ben levigata, ed il cui peso non oltrepassa 500 libbre, varia secondo la qualità delle superficie, che si stropicciano; tal che se queste sieno di legno nuovo ben piallate, l'attrito è la metà della pressione; se sieno di uno stesso metallo e ben levigate, l' attrito è un quarto della pressione; e se una di quelle superficie sia di metallo e l' altra di legno, l' attrito pareggia un quinto del peso*

del corpo stropicciante. Che se le fibre dei legni, che si stropicciano, s' interseghino ad angolo retto, lo sfregamento riducesi ad un quarto del peso. Ma di tutte le sostanze, che si stropicciano, l' attrito divien minore dopo di averle per qualche tempo stropicciate; tal che se esso nei legni nuovi e ben piallati è la metà del peso; nei legni, che si sono per quel tempo stropicciati ne diviene un terzo dello stesso peso.

§. 353. Regola III. *L' attrito di una macchina in moto vien considerabilmente diminuito qualora i pezzi, le cui superficie debbono strisciare le une sulle altre, si facciano di materie eterogenee.*

§. 354. Regola IV. *Un corpo, che va stropicciando una superficie alquanto levigata, ed il cui peso oltrepassa 500 libbre, vi soffre un attrito minore di quella parte del suo peso se questo non fosse maggiore di 500 libbre; tal che se per un certo corpo, che non pesi più di 500 libbre, l' attrito pareggi la terza parte del suo peso, aumentando il peso di questo corpo al di là di 500 libbre, l' attrito in parità di circostanze sarà minore della terza parte di questo novello peso.*

§. 355. Regola V. *Spalmando con una materia untuosa le superficie dei corpi, che si stropicciano, tanto più si diminuisce l' attrito di esse, per quanto maggiore è la consistenza di quella materia. Così se quella materia sia il sego, lo sfregamento si diminuisce di una metà.*

§. 356. Regola VI. *L' attrito varia secondo la durata del contatto delle superficie, che*

si stropicciano, *e cresce per un certo tempo, sinchè giunge al suo valor massimo e costante. Questo tempo è di un minuto o due nei legni, è brevissimo pei metalli, ma nei legni posti sopra i metalli dura per alquanti giorni. Esso si prolunga molto collo spalmare di qualche materia untuosa le superficie, che si stropicciano.*

§. 357. Regola VII. *Un corpo, che va stropicciando una superficie ugualmente scabrosa, vi soffre maggiore attrito a misura che ne progredisce con maggior velocità. Ma qualora la velocità di esso corpo ne oltrepassa certi limiti, l'attrito diviene continuamente minore.*

Rischiar. La verità di questa regola si concepisce facilmente; poichè aumentandosi la velocità del corpo stropicciante fino ad un certo limite, maggiore ne diviene il numero delle scabrosità, che in un dato tempo debbono superarsi dalla potenza per muovere quel corpo. Ma qualora la velocità del corpo ha oltrepassato un certo limite, gli ostacoli, che dalle scabrosità delle superficie si oppongono al movimento del corpo si rendono trascurabili rispetto alla quantità di moto del corpo stesso.

§. 358. *Scol.* Situando un cilindro sopra un piano orizzontale, il quale si rimuova dalla sua posizione facendolo successivamente inclinare all'orizzonte sotto diversi angoli, si perverrà a determinare l'angolo della quiete (§. 349.), il quale se per poco si aumenti farà sì che il cilindro mentre ne progredisce su quel piano si aggira pure intorno al suo asse. Or tale angolo rinviensi assai picciolo relativamente a quello,

che si ha quando il corpo striscia sul piano. Dunque l' attrito di un cilindro, che mentre ne progredisce sopra un piano si aggira pure intorno al suo asse, l' è molto picciolo.

§. 359. Regola VIII. *Un peso, che si trascini sopra un piano orizzontale vi soffre in parità di circostanze il menomo attrito, se la direzione della potenza, che il trae, inclinasi all' orizzonte sotto quell' angolo, che ha f per tangente* (§. 350.).

Rischiar. Questa regola non nasce dalla sperienza, come sono le antecedenti, ma vuol essere dimostrata. Per la qual cosa (fig. 43.) sia ACE il piano orizzontale su cui si strascini dalla forza F il peso P sotto l' angolo $MCE = \varphi$, e presa nella direzione della potenza la parte $CM = F$, si cali dal punto M la ME perpendicolare al detto piano orizzontale, e nel piano verticale CME si compia il rettangolo MECN. Sarà $ME = F \text{ sen.}\varphi$, e $CE = F \cos.\varphi$.

E poichè la potenza CM equivale alle due forze CN, CE, sarà lo stesso tirare il peso P colla potenza F, che tirarlo colle due forze $F \text{ sen.}\varphi$, ed $F \cos.\varphi$ per le direzioni CN, CE. Or la prima di queste forze, poichè diretta da C verso N, non fa che allegerire il peso P: onde la pressione di tal corpo sull' orizzonte non sarà P, ma $P - F \text{ sen.}\varphi$, e l' attrito, che vi produce, sarà $Pf - Ff \text{ sen.}\varphi$: e l' altra forza CE, o $F \cos.\varphi$ dovrà pareggiare tal frizione. Dunque sarà

$$Pf - Ff \text{ sen.}\varphi = F \cos.\varphi,$$

e quindi

$$F = \frac{Pf}{f \text{ sen.}\varphi + \cos.\varphi}.$$

Or dovendo essere F un minimo, il denominatore della frazione $\frac{Pf}{f\,\text{sen.}\phi+\cos.\phi}$ dovrà essere un massimo. E quindi per le ovvie regole del metodo de' massimi e de' minimi sarà

$$D.\,(f\,\text{sen.}\phi+\cos.\phi)=0,$$

cioè $\quad f\,d\,\phi\cos.\phi-d\,\phi\,\text{sen.}\phi=0,$

ed $\quad f=\frac{\text{sen.}\phi}{\cos.\phi}=\text{tang.}\phi.$

§. 360. *Cor.* Dunque se f è uguale ad $\frac{1}{2}$, l'angolo ϕ pareggia 26.° 34' a un di presso: se f è uguale ad $\frac{1}{3}$, l'angolo ϕ dev' essere di 18.° 26' in circa, e se f è uguale ad $\frac{1}{4}$, l'angolo ϕ dev' essere di 14°. 2' a un di presso.

§. 361. Regola IX. *In una macchina se la velocità delle parti stropicciate pareggi la velocità della potenza; l'attrito sarà* $\frac{2}{3}$ *di essa potenza: e se la velocità di quelle parti stia alla velocità della potenza, come n : m; l'attrito sarà* $\frac{2n}{3m}$ *della potenza.*

Sia (fig. 32.) BEIGDHLF un' asse nella ruota, e 'l diametro di questa di 3 piedi, e di 6 poll. il diametro dell'asse, o del cilindro EFHG, il quale si vada co' suoi estremi stropicciando ne' due fori circolari GH, EF fatti ne' suoi sostegni xy, XY. Sarà la velocità dello stropic-

ciamento alla velocità della potenza come 6 poll. a 36 poll., cioè come 1 a 6: vale a dire sarà $n=1$, ed $m=6$. Laonde se vi si applichi una potenza di 108 libb., la resistenza, che per equilibrarla dee essere sestupla di essa, monterà a 648 libb.; e l'attrito, che si è detto essere $\frac{2n}{3m}$ della potenza, sarà $\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6}$ 108 libb. $= \frac{1}{9}$ 108 libb. = 12 libbre. E poichè per superare questo attrito dovrebbersi alla potenza aggiungere altre 12 libb., le quali sono come una nuova potenza producente un nuovo attrito proporzionale al primo; n' emergerà nella macchina dalla potenza *addizionale* di 12 libb. un secondo attrito uguale a $\frac{1}{9}$ 12 lib. $= \frac{4}{3}$ libb. E così procedendo innanzi, sarà l'intiero attrito, che avrà la proposta macchina, uguale a

$$\left(12 + \frac{4}{3} + \frac{4}{27} + \text{ec.}\right) \text{lib.} = 13\frac{1}{2} \text{ lib.}$$

Che se il cilindro EGHF abbia l'asse BD di ferro di un poll. di diametro, cioè una sesta parte di quello di esso cilindro; il divisato attrito sarà un sesto di quello, che qui da ultimo vi ho indicato.

§. 362. Similmente se un carretto, ove impongasi il peso P, abbia due ruote ciascuna di 6 piedi di diametro, e 'l diametro del loro asse sia di 4 poll.; l'attrito sarà $\frac{4}{72}$, cioè $\frac{1}{18}$ di quello, che vi si eccitерebbe trascinando quel peso sul terreno. E perchè questa frizione è

quasi (§. 352.) uguale ad $\frac{1}{3}$ P ; sarà l'attrito del carretto, ove non vi si considori la gravità di esso, uguale ad $\frac{1}{3.18}P = \frac{P}{54}$.

§. 363. Regola X. *La rigidezza di una corda, cioè la difficoltà, che questa incontra ad avvolgersi ad un cilindro, è direttamente come una potenza del suo diametro, che nelle nuove e nelle impeciate ha per esponente* 1,7, *e nelle molto usate ha per esponente* 1,4, *e del peso, che la distende, ed inversamente come il diametro del cilindro, sù cui ella si avvolge.*

L'accuratissimo D:r Desaguliers prese una girella stabile, che essendo di 3 poll. di diametro aveva un perno di un sol pollice di diametro, e le circondusse una corda del diametro di poll. $1\frac{2}{3}$. A' capi di questa legò due pesi ciascuno di 800 libbre: e per saggiarne la resistenza, cui era soggetta tal macchina, ne accrebbe gradatamente uno de' detti pesi, finchè preponderando all' altro il sollevasse. Ma il peso *addizionale*, che bisognò a tal uopo, montò a libbre $436\frac{2}{3}$, che son maggiori della metà di ciascun peso: e tanto dovette essere eziandio la resistenza della girella nascente dallo strofinìo delle sue parti, e dalla rigidezza della corda. Dalle quali cose si raccoglie essere ben grande la resistenza della girella: il che può anche rilevarsi dall' esserne tanto il diametro del perno, che quello della corda molto grandi rispetto al

diametro di tal girella. Ma essendosi fatti girare intorno ad un pari perno, e con una simigliante corda, una girella di 24 pollici di diametro; il peso addizionale, che ne fece preponderare uno de' divisati pesi, non fu che di 45 libbre. Or raccogliendo quanto dalle sperienze si ritrae, può stabilirsi, che tra le macchine semplici la leva e 'l piano inclinato dieno pochissima frizione: che questa sia alquanto grande nell' asse nella ruota, e grandissima nella girella, nella vite, e nel cuneo.

CAP. XIX.

TEORICA DEL MOTO DELLE MACCHINE.

§. 364. *Def. XCV.* Se da un qualunque elemento di un corpo rigido rotante (§. 19.) si cali una retta perpendicolare all' asse di girazione; l' angolo, che in un dato tempuscolo genera tal retta, si dice *velocità angolare* dell' intiero corpo.

§. 365. *Def. XCVI.* La *velocità angolare* di una verga rigida e dritta, la quale giri circolarmente intorno ad un suo estremo, è l' angolo rettilineo, che in un dato tempuscolo genera tal verga.

§. 366. *Cor. I.* Tutti gli elementi di un corpo rigido, che ha moto rotatorio, debbono descrivere in un dato tempuscolo archetti circolari simili, i cui centri sono nell' asse di rotazione. E questi sono que' punti, ove le perpendicolari calate da quegli elementi sull' asse di rotazione lo incontrano.

§. 367. *Cor. II.* Siane (fig. 45.) A un ele-

mento del corpo rigido, che volgesi intorno all'asse CR, ed AC la perpendicolare calata dal punto A sulla CR. In un dato tempuscolo descrivasi dal punto A l'archetto AM, e dalla CA l'angolo ACM; si dirà AM la velocità assoluta del punto A, e l'angolo ACM sarà la velocità angolare sì della retta AC, che dell'intiero corpo rigido.

§. 368. *Cor. III.* Ed essendo l'angolo ACM uguale all'arco AM, che lo misura, diviso pel raggio del di lui cerchio; sarà *la velocità angolare di cotesto corpo uguale alla velocità assoluta di un di lui elemento, divisa per la distanza, che esso tiene dall'asse di rotazione.*

§. 369. *Cor. IV.* Se la velocità angolare di un corpo rigido si multiplichi per la distanza di un di lui elemento dall'asse di rotazione; il prodotto sarà l'assoluta velocità dello stesso elemento. E lo stesso intendasi di una verga rigida circolarmente aggirata intorno ad un suo estremo.

§. 370. *Cor. V.* La velocità angolare di un corpo rigido, che si volga intorno ad un asse, è la stessa da per tutto: laddove le velocità assolute de' di lui elementi cangiano al variar delle loro distanze dall'asse di rotazione.

§. 371. *Def. XCVII.* Quel punto, pel quale passa la risultante di tutte le forze, onde gli elementi di un corpo ne tendono al centro della terra, chiamasi *centro di gravità* dello stesso corpo.

§. 372. *Scol.* Ciascuna delle dimensioni di un corpo è insensibile per rapporto al raggio della terra. Dunque si può concepire, che sie-

no tra se parallele le direzioni delle forze, colle quali gli elementi di un corpo ne tendono al centro della terra.

§. 373. *Def. XCVIII.* Un asse di rotazione si dirà *centrale*, se passi per lo centro di gravità del corpo rigido, che vi si aggiri intorno.

PROP. LXVII. TEOR.

§. 374. *La verga immateriale* MC *sia volubile intorno al suo estremo* C, *ed abbia nell' altro estremo il corpicciuolo* M *spinto dalla forza normale* F ; *dico essere la velocità angolare della verga direttamente come la forza* F , *ed inversamente come il prodotto del corpicciuolo* M *nella lunghezza della verga.*

Dim. Si concepisca un' altra verga *mc* immateriale, che giri circolarmente intorno al suo estremo *c*, e che abbia nell' altro estremo un corpicciuolo *m* spinto dalla forza normale *f* : e sieno gli archetti MA , *ma* contemporaneamente descritti da' corpicciuoli M ed *m*, al par degli angoli elementari MCA , *mca*, che vi generano le verghe MC , *mc.* Saranno gli archetti MA , *ma* come le velocità de' corpicciuoli M ed *m* (§. 367.) : e gli angoli MCA , *mca* come le velocità angolari delle verghe (§. 367.). E poichè sta l' angolo ACM all' altro *acm* come MA ad *ma*, e come *mc* ad MC : ed è poi MA ad *ma* come F ad *f*, e come *m* ad M (§. 61.); sarà l' angolo ACM all' altro *acm* come F ad *f*, come *m* ad M, e come *mc* ad MC. Cioè a dire le velocità angolari delle verghe immateriali MC , *mc* saranno direttamente come le for-

ze F ed f applicate a' loro estremi, inversa mente come i corpicciuoli M ed m quivi legati, ed inversamente come le lunghezze di esse verghe. C. B. D.

§. 375. *Cor.* Se le verghe immateriali MC, mc si dicano R ed r; e per V e v esprimansi rispettivamente le loro velocità angolari; sarà $V : v :: (F:f)\ (m:M)\ (r:R)$.

PROP. LXVIII. TEOR.

§. 376. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, le velocità angolari di due verghe immateriali dovran pareggiarsi, se le forze normali applicate agli estremi di esse verghe sieno inversamente come le loro lunghezze, e sieno que' corpicciuoli inversamente come i quadrati delle stesse lunghezze.*

Dim. Ritenendo i simboli del Cor. prec. sarà $V:v::(F:f)\ (m:M)\ (r:R)$. Ma in questo Teorema supponesi, che stia $F:f::r:R$, ed $m:M::RR:rr$. Dunque sostituendo le seconde ragioni di queste due analogie in luogo delle prime, avrassi $V:v::(r:R)\ (RR:rr)\ (r.R.)$, cioè $V:v::RR\ rr: RRrr$. E quindi sarà V uguale a v. C. B. D.

§. 377. *Cor. I.* Essendo per ipotesi $F:f::r:R$; sarà F uguale ad fr:R. Ed essendo ancora $m:M::RR:rr$; dovrà essere M uguale ad mrr:RR.

§. 378. *Cor. II.* Dunque *la forza normale* f *spingendo il corpicciuolo* m, *ch' è all' estremo della verga rotante* r, *dee produrvi quella stessa velocità angolare, che vi produrrebbe la forza normale* fr:R *applicata all' estremo della verga* R, *ove siavi il corpicciuolo* mrr: RR.

PROP. LXIX. TEOR.

§. 379. *Se agli estremi de' raggi* (*fig.* 44.) CA, CB, CD; *ec. della ruota immateriale* ACD *volubile intorno al punto* C, *ne sieno legati i corpicciuoli* A, B, D, *ec. spinti rispettivamente dalle potenze normali e consensienti* Aa, Bb, Dd, *ec.*; *la velocità angolare dell' intiera ruota sarà direttamente come la somma de' momenti delle forze quivi applicate, ed inversamente come la somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dal centro di rotazione.*

Dim. Si chiamino r, r', r'', ec. i raggi CA, CB, CD, ec. della ruota. Sieno m, m', m'', ec. le masse de' corpicciuoli A, B, D, ec., ed f, f', f'', ec. l'energie delle forze normali, che gli spingono rispettivamente. Si tiri nel piano della ruota un altro raggio CL, che si dica R: ed in luogo de' corpicciuoli m, m', m'', ec., che son legati agli estremi de' raggi r, r', r'', ec. intendansi sostituiti questi altri corpicciuoli $mrr : RR$, $m'r'r' : RR$, $m''r''r'' : RR$, ec. seco raccolti, e legati all' estremo L del raggio CL. E poi in luogo delle forze f, f', f'', ec., che spingono rispettivamente que' primi corpicciuoli si surroghi la somma delle forze $fr : R$, $f'r' : R$, $f''r'' : R$, ec. applicate in L perpendicolarmente su di CL. Sarà la velocità angolare della proposta ruota quanto quella, che avrebbe la verga immateriale CL, volubile intorno a C, caricata nel suo estremo di un corpo uguale ad $(mrr+m'r'r'+m''r''r''+\text{ec.}) : RR$, ed animata (§. 378.) nello stesso estremo dalla forza normale $(fr+f'r'+f''r''+\text{ec.}) : R$. Ma la velocità

angolare di questa verga (§. 374.) esprimesi per l' energia della forza normale, divisa per lo prodotto del corpicciuolo nella di lui distanza dal centro di rotazione, cioè per $(fr+f'r'+f''r''+\text{ec.}) : (mrr+m'r'r'+m''r''r''+\text{ec.})$, ove siensi fatte le dovute riduzioni. Dunque tanta sarà eziandio la velocità angolare dell' intiera ruota immateriale. Ma il numeratore $fr+f'r'+f''r''+$ ec. della divisata frazione è l' aggregato de' momenti delle forze normali, che agiscono nella ruota (§. 306.), e 'l di lei denominatore $mrr+m'r'r'+m''r''r''+$ec. è la somma de' prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dal centro di rotazione. Dunque è vero ec. C. B. D.

§. 380. *Cor. Ed aggirandosi un corpo rigido intorno ad un immobile asse, sarà anche vero, che la sua velocità angolare sia come l' aggregato de' momenti delle forze, che vi agiscono, diviso per l' aggregato de' prodotti di ciascuna di lui particella nel quadrato della di lei distanza dall' asse di rotazione.*

§. 381. *Def. XCIX. Momento d' inerzia* di un corpo rigido, o di un sistema di corpi, menati in giro intorno ad un immobile asse, è la somma dei prodotti di ciascuna loro particella nel quadrato della di lei distanza dall' asse di rotazione.

§. 382. *Cor. I.* Dunque *la velocità angolare della divisata ruota* (§. 380.) *è in ragion diretta della somma dei momenti delle forze quivi applicate, ed in inversa dei momenti d' inerzia dei corpi, che vi si trovano.*

§. 383. *Cor. II. E la velocità angolare di*

un corpo rigido, che si aggiri intorno ad un immobile asse è anche direttamente come la somma dei momenti delle forze, che lo fan volgere, ed inversamente come il di lui momento d' inerzia.

§. 384. *Scol. I.* La verità di questo corollario è come un principio generale, onde debbonsi valutare le forze giratorie *nelle leve, negli assi, nelle ruote, nelle altre macchine sì semplici, che composte, in tutti i corpi rigidi rotanti, e finalmente in qualunque sistema di corpi, che seco uniti volgonsi intorno ad un asse fisso.* Ma prima che io passi più oltre voglio dichiararvi, perchè mai la somma dei prodotti di ciascun corpicciuolo rotante nel quadrato della di lui distanza dall' asse di rotazione siasi detto *momento d' inerzia*, e quanto sia questo *nelle leve prismatiche, e negli assi nelle ruote*; la prima delle quali cose io quì vi espongo nello Scol. II, e le altre due nei Teoremi, che il seguono.

§. 385. *Scol. II.* Si rileva dal §. 61., che la velocità di un corpo, che va per dritto equabilmente, sia direttamente come la forza, che la produce, ed inversamente come la massa, ch' ei contiene. Quì poi si è mostrato, che la velocità angolare di un sistema di corpi uniti debba essere nella ragion diretta dei momenti delle forze quivi applicate, e nell' inversa della somma dei prodotti di ciascun corpicciuolo nel quadrato della di lui distanza dall' asse di rotazione. Dunque questa somma si è convenevolmente denominata *Momento d' Inerzia*, affinchè la misura della velocità progressiva, e quella dell' angolare avessero un certo accordo nella forma di esprimersi, e nel modo di praticarsi.

§. 386. *Il momento d'inerzia di una verga parallelepipeda rettangola, che essendo rigida ed omogenea giri intorno ad un asse centrale, e perpendicolare a' piani opposti, uguaglia il peso della stessa verga multiplicato per un terzo del quadrato della metà della di lei lunghezza.*

Dim. Il rettangolo (fig. 46.) CMIH sia la sezione fatta nella proposta verga da quel piano condotto per l'asse centrale ON e per la di lei lunghezza CH, e presi nella CO i punti R ed r tra se vicinissimi, per essi si distendano due piani perpendicolari alla CH, e sia b^2 la sezione fatta da ciascuno di questi piani colla superficie della verga, ed a la metà CO della di lei lunghezza.

Ciò posto. Si dinoti con D la densità della verga, e si ponga $OR=x$; sarà $Rr=dx$, il volume del solido $RVvr=b^2dx$, e la massa dello stesso solido ne sarà rappresentata da Db^2dx. Dunque il momento d'inerzia del picciolo parallelepipedo $RVvr$ dovrà esserne dinotato da Db^2x^2dx, il cui integrale pareggia $\frac{1}{3}Db^2x^3+C$. Ma quest' integrale sparisce quando si fa $x=o$. Dunque dev' essere $C=o$. Il perchè il momento d'inerzia della metà CONM dell'intiera verga dovrà esserne dinotato da ciò che ne diviene l'espressione $\frac{1}{3}Db^2x^3$ ponendovi a in luogo di x, cioè da $\frac{1}{3}Db^2a^3$, ovvero da $Db^2a.\frac{1}{3}a^2$, e quello dell'intiera verga sarà uguale a $2Db^2a.$

$\frac{1}{3}a^2$. Ma $2Db^2a$ ne dinota la massa della proposta verga, ed $\frac{1}{3}a^2$ è la terza parte del quadrato della metà della di lei lunghezza. Dunque ec. C.B.D.

§. 387. *Cor. I.* Laonde se con M si dinoti l'intiero peso della leva parallelepipeda, o prismatica, che abbia uguali braccia, e la lunghezza di ciascuno di questi si dica a; dovrà essere il momento d'inerzia di essa leva uguale ad $M.\frac{1}{3}a^2$; cioè *uguale al peso dell' intiera leva multiplicato per un terzo del quadrato della lunghezza di un braccio.*

§. 388. *Cor. II.* Che se nell'estremo H del braccio HINO penda il peso P, ed ovunque all'altro braccio CMNO stiavi applicato il peso Q, e sia RO uguale ad r; il momento d'inerzia di questa leva caricata de' pesi P e' Q sarà uguale ad $\frac{1}{3}aaM+aaP+rrQ$, cioè uguale ad $aa\left(\frac{1}{3}M+P\right)+rrQ$.

PROP. LXXI. TEOR.

§. 389. *Il momento d' inerzia di un cilindro retto rigido, ed ugualmente denso, che si aggiri intorno al proprio asse, è uguale al di lui peso multiplicato per un mezzo del quadrato del raggio della base.*

Dim. Sia CMNO quel rettangolo, che rivolgendosi con perfetta rivoluzione intorno ad NO generi il proposto cilindro. Nella CO si pren-

dano i punti R ed r tra se vicinissimi, e per essi conducansi le rette RV, rv parallele alla NO. Intanto si dinoti con $m:n$ il rapporto della superficie di un cerchio al quadrato del raggio, con a la lunghezza dell'asse NO del cilindro, di cui r ne dinoti il raggio OC della base. Sia inoltre D la densità del cilindro, ed M la di lui massa: e si ponga $RO=x$. Sarà $Rr=dx$, ed $Or=x-dx$.

Ciò posto. Poichè sta $n:m::x^2$ al cerchio, che ha per raggio x, ed $n:m::(x-dx)^2$ al cerchio che ha per raggio $x-dx$; sarà la differenza di questi cerchi, o sia l'armilla circolare descritta da Rr uguale ad $\frac{m}{n}\left(x^2-(x-dx)^2\right)$, cioè a $\frac{2mxdx}{n}-\frac{2mdx^2}{n}$, ch'è a un di presso uguale a $\frac{2mxdx}{n}$. Il perchè dev' essere il volume dell'anello cilindrico generato dal rettangolo $RVvr$ uguale a $\frac{2maxdx}{n}$, la massa di questo uguale a $\frac{2Dmaxdx}{n}$, e 'l momento d'inerzia di esso uguale a $\frac{2Dmax^3dx}{n}$, il cui integrale pareggia $\frac{Dmax^4}{2n}+C$. Ma quest'integrale sparisce quando ne diviene $x=0$. Dunque dev' essere $C=0$. Il perchè il momento d'inerzia del proposto cilindro dee pareggiare ciò che ne diviene il fratto $\frac{Dmax^4}{2n}$ al porvisi r per

x, cioè $\frac{Dmar^4}{2n}$, ovvero $\frac{Dmar^2}{n} \cdot \frac{r^2}{2}$. Ma la massa M di quel cilindro adegua $\frac{Dmar^2}{n}$. Dunque il momento d' inerzia di esso cilindro pareggia la massa M di esso multiplicata per $\frac{r^2}{2}$, ch' è la metà del quadrato del raggio della base. C. B. D.

PROP. LXXII. PROBL.

§. 390. *Date le dimensioni e 'l peso di un asse nella ruota determinare la velocità, con cui la resistenza n' è mossa dalla potenza.*

Sol. Sia (fig. 47.) OBCL il cilindro, ed AO il raggio della ruota, e si faccia $OB=r$, $OA=R$, l' inerzia del peso Q, che vuol trarsi sia Q, e q la sua forza renitente. Dinoti P l' inerzia della potenza, e p la sua forza sollecitante. E chiamando M la massa del cilindro, il suo momento d' inerzia sarà $\frac{1}{2}\, Mrr$ (§. 389.): e sarà poi il momento d' inerzia di Q uguale a Qrr, e quello di P uguale a PRR (§. 381.). In oltre i momenti della potenza e della resistenza sono rispettivamente pR, e qr (§. 306.) onde sarebbe $p\mathrm{R}-qr$ il momento di quella forza, ch' effettivamente volgerebbe questa macchina, se essa non avesse attrito. Per la qual cosa chiamando φ quel peso, che pendendo dal cilindro equivale alla frizione della macchina, e φr il suo momento; sarà $p\mathrm{R}-qr-\varphi r$ il momento di quella forza, che effettivamente volge

l' asse nella ruota. E quindi la velocità angolare di questa macchina (§. 382.) sarà $(pR - qr - \varphi r)$: $\left(\frac{1}{2} Mrr + Qrr + PRR\right)$, e chiamando V la velocità assoluta del punto L, o della resistenza Q, sarà (§.369.)

$$V = \frac{r(pR - qr - \varphi r)}{\frac{1}{2} Mrr + Qrr + PRR} \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{C. B. F.}$$

§. 391. *Cor. I.* Il valore di questa frazione si accresce, secondo che restando invariato il numeratore si minori il di lei denominatore. E questo ne addiviene minorando M, o Q, o P, o tutte insieme, o duę di tali grandezze. Dunque *ritenendo le stesse dimensioni di un asse nella ruota, e la stessa energia della potenza e della resistenza, avrassi una maggior velocità nella resistenza, secondo che meno pesi il cilindro, o abbia meno inerzia la potenza, o la resistenza.*

§. 392. *Cor. II.* I fattori, che veggonsi nel numeratore della stessa frazione, non son che r, e $pR - qr - \varphi r$: dunque il di lei valore si farà zero, quando pongasi $r = 0$, o pure $pR - qr - \varphi r = 0$, cioè $pR = qr + \varphi r$, e dovrà stare $p : q + \varphi :: r : R$. Vale a dire *la velocità del peso* P *dovrà svanire in due casi, o quando sia zero il raggio del cilindro, onde traesi quel peso: o quando il raggio di esso cilindro stia a quello della ruota come l' energia della potenza all' aggregato della resistenza e della frizione della macchina.* Le quali cose dal solo equilibrio di tal macchina avrebbonsi potuto altresì rilevare.

§. 393. *Cor. III.* Tra questi due casi contengonsi tutti quegli altri, ne' quali verrà il peso promosso dalla potenza ora con una velocità, ora con un'altra. E tra essi vi sarà anche quello, in che esso dalla potenza colla massima prestezza n'è tirato, o sollevato.

§. 394. *Cor. IV.* E quindi se diasi la massa, e la lunghezza del raggio della ruota potrà col metodo de' massimi e de' minimi definirsi il semidiametro del cilindro, tal che un dato peso siane colla massima velocità promosso da una data potenza.

§. 395. *Scol.* La soluzione di questo Problema può effettuarsi anche da' candidati del riferito metodo: ond' io tralasciandola v' arreco solamente quella di un Problema affine, che sembrami assai vantaggioso per l' uso di una tal macchina. Intanto tutte queste speculazioni ed altre simiglianti si possono fare anche riguardo alle leve, che muovono de' gran pesi: e m'immagino, che da ciò voi ritrarrete quanto sia insufficiente quel principio Galileano, che in ogni macchina il risparmio della forza sia col dispendio del tempo, e che il risparmio del tempo esiga maggior consumo di forza: sicchè l' un risparmio sia in ragion inversa dell' altro. Ma di queste cose vi ragionerò quaggiù ampiamente.

PROP. LXXIII. PROBL.

§. 396. *Rappresenti (fig. 47.)* CLOBA *l'asse nella ruota si vuol determinare la lunghezza del raggio* OA *della ruota, affinchè la resistenza* Q *possa trarsi colla massima velocità dalla potenza* P.

Sol. Ritengansi gli stessi simboli del Problema precedente, e si ponga solamente x in luogo di R: onde la velocità della resistenza Q dovrà esserne uguale ad $r\,(px - qr - \varphi r) : \left(\frac{1}{2}Mrr + Qrr + Pxx\right)$. E facendo per brevità di calcolo $q + \varphi = n$, ed $\frac{1}{2}M + Q = N$, sarà

$$V = \frac{rpx - nrr}{Nrr + Pxx}.$$

Ma nel caso che la grandezza V è un massimo, dV è zero. Dunque sarà ancora

$$D.\frac{rpx - nrr}{Nrr + Pxx} = 0$$

cioè $rpdx(Nrr + Pxx) - 2Pxdx(rpx - nrr) = 0$

E dividendo per dx questa equazione, ed ordinandola secondo le potenze della grandezza x, avrassi

$$xx - \frac{2nrx}{p} = \frac{Nrr}{P},$$

ed $$x = \frac{rn}{p} + r\sqrt{\left(\frac{N}{P} + \frac{nn}{pp}\right)}$$

Laonde restituendo i valori delle grandezze n ed N, si otterrà

$$x = \frac{rq + r\varphi}{p} + r\sqrt{\left(\frac{M + 2Q}{2P} + \left(\frac{q + \varphi}{p}\right)^2\right)}.\text{C.B.F.}$$

§. 397. *Cor. I.* Il raggio della ruota sarà tanto più corto, quanto in parità di altre circostanze n'è di maggior valore la grandezza p,

o l'altra P: cioè quanto la potenza movente sia più intensa, o abbia più d'inerzia.

§. 398. *Cor. II.* Supponghasi, che P sia zero; sarà $\frac{M+2Q}{2P}=\frac{M+2Q}{0}=\infty$, e quindi anche x sarà infinito. Dunque *se la potenza movente non abbia inerzia; il raggio della ruota dovrà essere infinitamente lungo, affinchè essa potenza promuovane il peso colla massima velocità.*

§. 399. *Cor. III.* E per un tal vantaggio *debbonsi in un mulino a vento le ali più lunghe alle più corte preferire: ancorchè sì queste, che quelle abbiano una stessa superficie, ed una stessa percossa ricevano dal vento.*

§. 400. *Scol. I.* La grandezza $r(pR-qr-\rho r):(\frac{1}{2}Mrr+Qrr+PRR)$, onde quì sopra ho espressa la velocità assoluta del peso, che traesi coll' asse nella ruota, in realtà non è che un di lei elemento, proporzionale a quella forza acceleratrice, che vel produce. Pur non di meno non ho deviato dal mio proposito istituendo il calcolo su questa espressione: imperciocchè la massima velocità del peso non può prodursi, che dalla massima forza, che lo accelera: e le dimensioni, che ha la macchina per ottener questa, dovrà averle per quella.

§. 401. *Scol. II.* Il sommo Eulero, cui piacque specular l'uso più lucroso delle macchine sì semplici, che composte, si occupò in una ben lunga dissertazione (1) a risolvere alquanti Pro-

(1) *Comm. Accad. Petropol. Vol. X.*

blemi su questo argomento: l'ultimo de' quali, che sembrami più arduo di quelli, che il precedono propone a « formare un sistema di ruote » dentate e di rocchetti, tal che un dato peso » colla massima velocità siane sollevato da una » potenza data ». I principii, donde il Valentuomo distese l'analitica soluzione, son que' medesimi quassù adoperati. Ma oltre a questi evvene un altro tutto nuovo, e degno di grandissima considerazione, ed è che *il momento di una ruota, che aggirandosi ne muove un' altra, debba essere in parità di altre circostanze, come il quadrato della di lei velocità angolare.* Intanto dal terzo Corollario, e dallo Scolio dello stesso Problema ci ne rileva, 1.° *che quanto meno ruote si combinino in tal macchina, tanto più velocemente si promuova un peso, da una data potenza animato.* 2.° *E che se le circostanze di essa macchina non permettano di diminuirne il numero delle ruote, debba farsi la prima ruota ben grande riguardo al suo rocchetto, e che negli altri assi sieno quasi uguali i raggi delle rispettive ruote e de' rocchetti.*

PROP. LXXIV. TEOR.

§. 402. *È falsa quella massima comunemente da' Meccanici adottata, che ogni macchina debbasi porre in moto, sol che vi si accresca un poco la potenza, la quale colla resistenza si equilibrava.*

Dim. Questo principio sarebbe vero, se in pratica si potesse formare qualche macchina di materia non inerte: e si potessero altresì ren-

dere tanto pulite, e lisce quelle sue parti, che si stropicciano sicchè vi si tolga qualunque attrito, e non vi emerga tra esse sensibile attrazione. Ed essendovi delle corde, cui sieno legati i pesi da trarsi, si converrebbe, che anche queste avessero una perfetta cedevolezza, onde non esigasi un soprappiù di forza nella potenza per vincerne la rigidezza loro. Ma tali condizioni possono ritrovarsi nelle sole macchine ideali, e non già nelle reali: in ciascuna delle quali deesi accrescere di molto la potenza, affinchè il suo momento non solo superi quello della resistenza, ma altresì vinca le frizioni, le rigidezze delle funi, ed anche i momenti d'inerzia di que' corpi, che al muoversi della macchina vi si aggirano (§. 390.). Dunque non è vero, che una macchina debbasi porre in moto, tosto che si accresca anche d'un infinitesimo la potenza, che colla resistenza si equilibrava. C. B. D.

PROP. LXXV. TEOR.

§. 403. *Le regole dell' equilibrio di una macchina son ben diverse da quelle del di lei moto.*

Dim. L'equilibrio in una macchina, siasi semplice o pur composta, nasce dall' equalità de' momenti della potenza e della resistenza, che quivi agiscono: laddove il momento di essa macchina vien dalla prepollenza del momento della potenza su quello della resistenza, sulle frizioni de' corpi, che si stropicciano, sulla rigidezza delle funi, che le appartengono, e su i momenti d'inerzia di que' corpi, che al muoversi della macchina vi si aggirano (§ 402.). E

poichè queste forze renitenti alla potenza sono fra se diverse non pur nell' origine loro, ma nell' energìa, nel modo onde vi agiscono, e nel metodo di misurarle; chi potrà mai confondere le regole dell' equilibrio di una macchina con quelle del di lei moto, o dalle prime trarne le seconde? C. B. D.

PROP. LXXVI. TEOR.

§. 404. *È insufficiente quel principio adottato da' Meccanici, che quanto più forza si risparmii nel produrre un dato effetto con una macchina, tanto più tempo vi si richiegga a produrlo. E che vicendevolmente il risparmio del tempo siavi col dispendio della forza; sicchè non vi si possono que' due risparmii procurare insieme.*

Dim. Il gran Galilei nel suo Trattato della Scienza Meccanica s'impegnò di dimostrare questa massima con profonde e leggiadre speculazioni, le quali non furono attentamente esaminate da coloro, che adottaronla, ne confutate dall' Eulero, cui riuscì calcolando rilevarne la di lei insufficienza. Dunque è di bene, che io quì vi esibisca il prospetto di tali ragioni, e ve ne additi que' nei, che sfuggon l' acume di chi le contempla liviemente.

Immaginatevi (ecco l' esemplo su cui ragiona il Valentuomo), che una potenza applicata all' asse nella ruota sollevi un peso decuplo della sua forza: onde debba esserne il semidiametro della ruota decuplo del semidiametro dell'asse (§. 325.), e la circonferenza di quella altresì decupla della circonferenza di questo. Sarà chiaro,

che quando la potenza si sarà mossa una volta per la circonferenza della ruota ; l' asse, cui si avvolge la corda traente il peso, avrà fatta una sola rivoluzione : e 'l peso avrà percorsa la decima parte di quel, che avrà camminato la potenza. Dunque tal potenza, dovendo condurre per un dato spazio la resistenza decupla della sua forza, è obbligata a trascorrerlo dieci volte, e quindi dividendo quel peso in dieci parti, ciascuna delle quali sia quanto la potenza; questa potrà trasportarle una per volta. Con che il vantaggio, che traesi da questa macchina, o da altra, è di condurre tutto il peso unito; ma non con manca fatiga, o con maggior prestezza, o per maggiore intervallo di quello, che la medesima forza potesse fare conducendolo a parte a parte.

Ma permettetemi, che vel dica, non son che falsi que' due principii su i quali poggia l' intiero discorso del Galilei, cioè I° *che un peso decuplo di una data potenza possa da questo esser tirato con un mangano, ove il semidiametro della ruota sia decuplo del semidiametro del cilindro*, II° *e che tal potenza investendo una decima parte di quel peso valga a condurla in un dato tempo per tanto spazio per quanto nello stesso tempo sarebbesi elevato con della macchina l' intiero peso*. Onde il divisato ragionamento, quantunque chiaro e venusto, non è saldo quanto ne pare. Ed in vero riguardo al primo de' due principii, chi di voi è sì smemorato, che dalle anteriori Teoriche (§. 325.) non raccolga doversi in tal macchina quel peso colla potenza equilibrare, e non esserne mica dalla potenza sollevato? E chi non

vi avverte, che di molto converrebbe accrescerne il momento della potenza, affinchè questa vincendo la renitenza del peso, la frizione della macchina, ed i momenti d' inerzia de'corpi, che vi si aggirano potesse poi trarne il mentovato peso (§. 402.)? Ma riguardo al secondo principio, mi sembra da ogni verità meccanica alieno quel che vi si propone: *che tal potenza investendo la decima parte del peso possa muoverla con tanta velocità, con quanta l' intero peso si sollevava dal mangano, dalla stessa potenza animato.* Vale a dire supponendo, che la potenza sia un peso di 10 libbre, e di 100 la resistenza (di cui ogni decima parte n'è anche di 10 libbre), dovrà dirsi, che un peso di 10 libbre investendone un altro a se uguale il possa spingere compartendogli una velocità data. E come ciò ne addiviene? e per qual parte deesi muovere ciascuno de' pesi? Dunque è falso non solo quel principio, col quale il Galilei apre il suo ragionamento, che quell'altro, ond' ei lo chiude.

Ma la fallace pruova di un Teorema nulla decide sulla verità o falsità di esso. Dunque fia meglio, ch' io tralasciando cotesto esame, mi rivolga a dimostrarvi direttamente il mio assunto. Per la qual cosa suppongasi (per ragionarvi sulla stessa macchina), che il raggio della ruota sia alquanto maggiore del decuplo raggio del cilindro, cioè che abbia una tal lunghezza, che la mentovata potenza applicata ad angoli retti al di lui estremo possa prevalere al momento del peso, che vi si trae, alla frizione della macchina, ed a' momenti d' inerzia della macchina, e de' corpi, che vi si aggirano. Laonde si

chiami a cotesto raggio della ruota, ed A sia quello che essa dovrebbe avere per l'uso più lucroso (§. 396.) (cioè per poterne promuovere il peso per un dato spazio S nel minimo tempo, che si dica t): e si supponga essere a minore di A. Sarà chiaro, che dalla prevalente energia della potenza debbasi generare una certa velocità angolare: e che il peso abbiasi a trarre per lo spazio S in un certo tempo, che si dica t. Si supponga di bel nuovo, che il raggio della ruota sia uguale ad a': la qual grandezza sia altresì minore di A, ma maggiore di a. Dovrà eccitarsi nella macchina una velocità angolare maggiore di quella, che essa macchina dianzi aveva, e 'l peso dovrà condursi per lo spazio S in un tempo minore di T, e maggiore di t. E così successivamente ragionando verrà a concludersi, che ai raggi di una ruota delle rispettive lunghezze a, a^{I}, a^{II}, ec. . . . A, debbanvi corrispondere i tempi della promozione del peso, rispettivamente uguali a T, T^{I}, T^{II}, ... t, e che quella serie sia crescente, e questa decrescente. Or premesse tali cose, sia vero ciò che volgarmente si dice, che quanto si guadagni di forza per mezzo di una macchina, altrettanto scapiti nel tempo, e che il risparmio del tempo esiga una potenza più poderosa. Dunque ci vorrebbero disuguali potenze, per esempio p, p^{I}, p^{II}, . . . P per poter trarre lo stesso peso all'altezza S negl'ineguali tempi T, T^{I}, T^{II}, . . . t: ed esse potenze dovrebbero essere nell'inversa ragione di questi tempi, o almeno dovrebbero successivamente crescere, come van decrescendo i tempi T, T^{I}, T^{II}, . . . t. Ma qui la potenza, che in tutti questi casi anima

la macchina, non è che la stessa: dunque è falsa la proposta massima.

CAP. XX.

REGOLE DA TENERSI NELLA COSTRUZIONE DELLE MACCHINE, E NELL' ESAMINARLE.

§. 405. Regola I. *Quando con diverse macchine può ottenersi uno stesso fine, giova scegliere quella, ch' è d' uso più lucroso: cioè che nel minimo tempo promuova per un dato spazio una data resistenza adoperandovisi una potenza data.*

Leggete quanto stà scritto nel Cap. prec.; e massime nel §. 396.

§. 406. Reg. II. *Qualor si tema, che una macchina semplice possa frangersi, o incurvarsi da un gran peso, che vi si adatti, sarà necessario avvalersi di una macchina composta: regolandone le sue dimensioni coi dati rapporti della potenza e della resistenza, e calcolandone bene le frizioni, che sogliono moltiplicarvisi, ed i momenti di essa macchina, e dei corpi, che vi si muovono.*

Questa regola è diretta a farvi ricredere di ciò che forse avrete appreso dai Geometri puramente speculativi, che *basti levissima forza a sollevare un gran peso, sol che vi si adoperi una leva eterodroma, le braccia della quale sieno reciproche a quella forza, ed a quel peso. Che colle sole macchine semplici possiamo vantaggiarci ogni uso, che ne piaccia.* Che ec. Le quali massime sarebbero vere, se in natura si dassero dei corpi perfettamente

rigidi, e d' inerzia privi. Ma qual corpo v' ha sì duro ed inflessibile, che ad una gagliarda pressione o non si franga, o non si fletta in verun modo? e qual n' è mai quell' altro, cui l' inerzia della sua massa nol faccia restio al moto? Dunque temendosi, che una macchina semplice possa rompersi, o piegarsi all' azione delle forze applicatevi, dovremo invece di essa adottarne una composta. Or in una macchina composta, massime s' ella sia molto intrigata, v' emergono delle molte e varie resistenze, pei diversi stropicciamenti, che vi si fanno, per le diverse rigidezze e tensioni delle corde, che talor vi sono, e per le ineguali velocità angolari de' di lei pezzi. Dunque convien determinare bene siffatte resistenze, per valutarne il di lei effetto: lo che esige un profondo Meccanico, ed un valente Analista.

§. 407. Reg. III. *Una potenza, che agisca per pressione su di una macchina, ritiene sempre la stessa forza impellente, o che la macchina sia in quiete, o che ella muovasi velocemente come ne piaccia. Ed al contrario, una potenza, che operi con replicate spinte su di una macchina, al muoversi di questa, si scema di energia.*

Quando la potenza di una macchina sia un peso, o l' elaterio di un corpo, la sua energia riman sempre la stessa, qualunque siane la velocità, ond' essa macchina si aggiri. E se tal potenza sia l' urto dell' acqua profluente, la percossa dell' aria, o altra consimil forza, la sua energia dee decrescere a misura che la velocità della macchina si accresce, e può anche addivenire, che ella svanisca interamente. Per in-

tendere come ciò nasca, immaginatevi di voler incontrare colla vostra mano un sasso, che venga scendendo dall'alto, e che all'arrivarne sulla vostra mano voi l'abbassiate con pari velocità, o con velocità minore di esso. Sarà manifesto, che nel primo caso il sasso non farà colpo, riducendosi la vostr'azione ad un semplice toccar senz'offendervi: e che nel secondo l'impressione, che ne riceverete, sarà come la differenza delle velocità del sasso e della mano. In simil guisa l'acqua di un fiume, che percuote le palmette di una ruota quiescente, la volge coll'intero empito del suo corso: ma all'aggirarsi della ruota esse vi ricevono meno urto sfuggendo l'acqua profluente. Ed un vento, che spiri sulle volubili ale di un mulino, vi fa tanto men colpo, quanto più celeri queste vi si volgono.

§. 408. *Def. C.* In una macchina *il momento d'impulsione* è il prodotto della forza impellente nello spazio, che ella descrive in un secondo: ovvero è il prodotto di essa forza impellente nella velocità, con cui vi si muove (§. 27.)

§. 409. *Scol.* Questo momento d'impulsione fu detto da Daniele Bernoulli *Potentia absoluta*, e dall'Eulero *Momentum impulsus.*

§. 410. *Def. CI. Il momento di effetto* di una macchina è il prodotto della forza della resistenza nello spazio, che questa descrive in un secondo.

§. 411. *Scol.* Immaginatevi, che una macchina sollevi in ogni secondo all'altezza a il peso P; si dirà aP il momento di effetto di essa macchina.

§. 412. Reg. IV. *Il più gran momento d'impulsione, che può ottenersi con una mac-*

china animata dall' acqua profluente, si ha quando la celerità di quella parte della macchina, che ne riceve l' urto, sia un terzo della velocità dell' acqua (1).

Si chiami c la velocità, onde l' acqua imbatte perpendicolarmente su di una parte della macchina: a^2 sia la superficie di questa parte, che riceve l' urto, ed u la velocità di a^2, che muovasi per lo stesso verso del fluido. Sarà l' impressione fatta dall' acqua sulla superficie a^2, quanto quella, che le si farebbe, se restando la macchina in quiete, l' acqua ne percuotesse la stessa superficie a^2 non già colla velocità c, ma coll' altra $c-u$, ed eziandio ad angoli retti: la qual cosa è di per se chiara. E poichè, come da sicure sperienze si rileva, l' impressione, che fa un fluido percuotendo perpendicolarmente una data superficie piana, è come la magnitudine di questa, e come il quadrato della velocità di quello; sarà l' energia della percossa, che vi fa l' acqua profluente sulla superficie a^2, uguale ad $a^2(c-u)^2$: e 'l momento d' impulsione (§. 408.) sarà $a^2u(c-u)^2=a^2(c^2u-2cu^2+u^3)$. La qual grandezza si ponga uguale ad y. Or dovendo quest' espressione divenire un *massimo*, sarà per le leggi del *metodo dei massimi*, e *dei minimi*.

$$a^2du(c^2-4cu+3u^2)=dy=0. \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

---

(1) Quì si prescinde da ogni variazione, che può addivenirne, o dalla diversa energia de' filamenti del fluido percuzienti il solido, o dalle diverse distanze, che hanno dall' asse di girazione i diversi punti del solido percossi dal fluido.

E quindi $c^2 - 4cu + 3u^2 = o$.

E risolvendo quest' equazione quadratica, sarà

$$u = \frac{2c}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4c^2}{9} - \frac{c^2}{3}\right)},$$

o sia $u = \frac{2c}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4c^2 - 3c^2}{9}\right)}$,

cioè $u = \frac{1}{3} c$.

E poichè differenziando l'equazione (A) ottiensi

$$a^2 du^2(-4c + 6u) = d^2 y,$$

cioè $a^2(6u - 4c) = \frac{d^2 y}{du^2}$;

sarà $\left(\text{sostituendo per } u \text{ il suo valore } \frac{1}{3} c\right)$

$$a^2(2c - 4c) = -2a^2 c = \frac{d^2 y}{du^2}$$

È dunque negativo il valore di $d^2 y : du^2$: e quindi per le regole del divisato metodo dee essere u uguale ad $\frac{1}{3} c$, quando vogliasi, che sia un massimo il momento d'impulsione $a^2(c^2 u - 2cu^2 + u^3)$.

§. 413. *Cor. I.* Dall' analisi quassù recata si debbono raccorre più cose degne della vostra attenzione. Ed in primo luogo se u sia uguale a c, il momento d'impulsione, ch'è espresso dalla formola $a^2 u(c-u)^2$, diverrà $a^2 u(c-c)^2 = o$. Vale a dire *l'acqua profluente non farà alcuna impressione sulle palmette di una ruota,*

che ella ne aggiri, quando la velocità delle palmette, e quella dell' acqua si pareggino. Lo stesso convien dire del vento, che spiri sulle ali di un mulino.

§. 414. *Cor. II.* L' impressione, che fa l' acqua sul piano quiescente a^2 percuotendolo ad angoli retti colla velocità $c-u$, è quanto $a^2(c-u)^2$. Dunque facendo u uguale ad $\frac{1}{3}c$, sarà tale impressione uguale a $\frac{4}{9}a^2c^2$.

§. 415. *Cor. III.* E perchè $a^2(c-u)^2$ è uguale ad $a^2c^2\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$, ed è poi a^2c^2 l' impressione, che fa sul piano a^2 l' acqua, che il percuote colla velocità c, la quale impressione si è trovata per esperienza uguale ad un certo peso, che si dica P; sarà $a^2(c-u)^2=P\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$. *Vale a dire l' acqua, che fluendo colla velocità e percuote perpendicolarmente la palmetta di una ruota, la quale fugga colla velocità u, può aversi come un peso uguale a* P $\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$.

§. 416. Reg. V. *Il massimo momento d' impulsione, che può ottenersi con una macchina animata dalla forza di un uomo, si ha quando la velocità di tal potenza è un terzo di quella, onde muovendosi quest' uomo soffrirebbe il total dispendio della sua forza.*

L' origine delle forze animali, ed il loro diffondersi pe' muscoli, è di un' investigazione as-

sai malagevole: pur non di meno il grand' Eulero ha saputo calcolarne l' energie, ed i momenti loro, servendogli di norma ciò, che si è nel §. prec. dichiarato. A tal uopo sia P la massima forza, che può fare un uomo stando in quiete: e tal forza da esso perdasi interamente, quando corra colla velocità c, cioè facendo lo spazio c in un secondo. Sia in oltre u la velocità, ond' ei si muove agitando una macchina, e sia u minore di c; sarà l' energia della forza, con cui quest' uomo muove la macchina, uguale a $P\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$, e 'l momento d' impulsione (§. 408.) sarà $Pu\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$.

E poichè per lo metodo de' massimi e de' minimi la variabile u dev'essere $\frac{1}{3}c$, quando $Pu\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$ diviene un massimo. Dunque sarà vero quanto ho quì proposto.

La forza di un uomo quiescente sia di 60 lib. francesi, e sia di 6 piedi la massima velocità, ch' ei può avere: cioè sia $P=60$ lib., e $c=6$ piedi; sarà nel caso della massima azione $u=2$ piedi. E quindi l' energia della sua forza, ch'esprimesi generalmente per $P\left(1-\frac{u}{c}\right)^2$, sarà $60.\frac{4}{9}=26\frac{2}{3}$ libbre, che a un di presso fanno 13 rot. napol. E supponendo essere la forza di un cavallo settupla di quella di un uomo, sicchè P sia di 420 lib. francesi, ed essere $c=12$ piedi; sarà nel caso della massima azione, che

ei può fare in una macchina, $P\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2 = \frac{4}{9}$. 420 libb. $= 186\frac{2}{3}$ libb., cioè di 90 rot. napol. in circa.

§. 417. Reg. VI. *Il più vantaggioso sito, che può avere l' ala di un mulino a vento rispetto al di lei asse, è quando questo se le inclini sotto l' angolo di 54° 44'. Intendendosi, che ella riceva un mediocre colpo d' aria in un sol luogo ed una sola volta : imperciocchè rendendosi continua ed impetuosa l' azione del vento, ed investendo l' intera ala, ne abbisognano altre regole per fissare la più vantaggiosa di lei situazione rispetto all' asse : le quali sono malagevoli a definirsi, e di dubbio evento.*

I. Per darvi qualche idea delle ale di un mulino a vento, immaginatevi il rettangolo (fig. 48.) QDEP, i di cui lati opposti QP, DE sieno bisecati dalla GA : che ei sia fortemente saldato ad un cilindro, l' asse del quale sia CB perpendicolare a GA, ed inclinato ad AE : e che il rettangolo e 'l cilindro volgansi tutti e due intorno all' asse CB. Si dirà la *figura* QDEP *l' ala di un mulino a vento.*

II. Per le rette GA, AB concepitevi condotto il piano GABF, e che dal punto A eriegansi le due rette AN, AM, quella perpendicolare al piano dell' ala QDEP, questa perpendicolare all' altro piano GABF, le quali dovranno essere amendue perpendicolari alla GA comune sezione di que' due piani. E sarà in primo luogo l' angolo BAE l' inclinazione de' due piani

QDEP, GABF: per essere la GA perpendicolare sì ad AE, che ad AB. II° Le quattro rette AM, AN, AB, AE dovranno trovarsi in uno stesso piano. Imperciocchè avendovi dimostrato essere retti gli angoli NAG, MAG, ed essendo anche retti gli angoli BAG, EAG per costruzione; le rette AM, AN, AB, AE dovranno giacere in uno stesso piano. III° E quindi se da un qualunque punto N della retta AN si menino le due rette NM, NR rispettivamente parallele ad AC ed AM; da queste quattro rette, che son tutte in uno stesso piano, verrà a formarsi un parallelogrammo, che sarà anche rettangolo per aver retto l'angolo MAR. IV° Finalmente l'angolo BAE fatto dall'asse dell'ala e dal di lei lato inferiore è quanto quello, che contiensi dalle divisate perpendicolari AN, AM: poichè essendo uguali gli angoli NAE, MAB, perchè retti, togliendo da essi di comune l'angolo MAE, dovrà restarvi l'angolo NAM uguale all'altro BAE.

III. Ciò premesso. Diasi dal vento una sola spinta all'ala QDEP nel punto *a* per la retta *ba* parallela all'asse AB: e condotte dallo stesso punto *a* le tre rette *am*, *an*, *ae* rispettivamente parallele ed uguali alle sottoposte AM, AN, AE, si compia il rettangolo *marn*, che sarà perfettamente uguale, e similmente posto all'altro MARN. E finalmente si chiami F quella spinta, e φ l'angolo *eab*, o il suo uguale EAB. Sarà F sen.φ l'energia della percossa, che la medesima ala riceve *a* (§. 87.): vale a dire l'ala nel luogo *a* riceve quella stessa impressione dalla forza F per *ar*, che dalla forza F sen.φ per *an*. Per la qual cosa se la retta *an*

dinoti la forza F sen. φ, che intendesi risoluta nelle due laterali *ar*, *am*; sarà chiaro, che la sola forza *am* debba volger l'ala d'intorno al di lei asse: poichè l'altra *ar*, diretta a rimuovere la stessa ala dal punto A, o a farle cangiar sito, viene interamente distrutta dall'invincibile forza, onde supponesi l'ala saldata al cilindro AB. Dunque la forza *an* sarà al suo momento nel volger l'ala come *an* : *am*, cioè come AN ad AM, o come il raggio al coseno dell'angolo MAN, o del suo uguale BAE (n.° II° di questa Reg.). E quindi, ponendo il raggio uguale ad 1, avrassi 1 a cos. φ, così F sen. φ al quarto F sen. φ cos. φ: che dovrà esprimere il momento, o l'energia, che avrà il filamento d'aria *ab* nell'aggirar l'ala intorno ad AB. E poichè il numero di simiglianti filamenti d'aria, che cadono sulla retta *ae*, parallela ad AE, è proporzionale al seno dell'angolo *tae*, o dell'altro BAE, cioè a sen. φ (1); sarà la loro energia nel volger l'ala intorno ad AB, come il momento di ciascheduno, e'l numero di tutti: cioè come F sen. φ cos. φ, e come sen. φ, vale a dire come F sen.$^2\varphi$ cos. φ. E quindi, dovendo quest'espressione divenire un massimo, sarà

(1) Si cali *et* perpendicolare ad *ab*. Saranno i filamenti di aria, che percuotono la *ae* sotto l'angolo *bae*, dello stesso numero di quelli, che si arresterebbero a percuotere perpendicolarmente la *et*. Ma il numero de' filamenti d'aria, che percuoterebbero perpendicolarmente la *ea* sta al numero di quegli altri filamenti, che ad angoli retti ferirebbero la *et*, come *ea* ad *et*, cioè come il raggio al seno di *eat*, o di EAB. Dunque il numero de' filamenti, che percuotono la retta *ea* sotto l'angolo *eat*, sarà proporzionale al seno di esso, cioè a sen. φ.

$$. \ D. F \ \text{sen.}^2\varphi\cos.\varphi = o,$$

cioè $$F d_\varphi(2\text{sen.}\varphi\cos.^2\varphi - \text{sen.}^3\varphi) = o,$$

o sia $$\cos.^2\varphi - \frac{1}{2}\text{sen.}^2\varphi = o = \cos.^2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\varphi,$$

ovvero $$\frac{3}{2}\cos.^2\varphi - \frac{1}{2} = o, \ \text{e} \ \cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Vale a dire $\varphi = 54.^\circ \ 44'$.

Questo valore dell' angolo del più vantaggioso sito dell' ala al di lei asse è identico a quello, che con soluzioni alquanto diverse rilevarono l' Ermanno, il Wolfio, ed altri valentissimi Geometri. Ma poichè l' azione del vento sull' ala quiescente è, in parità di altre cose, ben diversa da quella impressione, che recasi alla stessa ala rotante (come dalle cose dichiaratevi nella Reg. IV potrete intenderlo); il calcolo di quest' altro caso del Problema dee necessariamente racchiudere *il dato della volubilità dell' ala.* Quindi di ciò avvedutosi il signor Daniele Bernoulli, e dopo di lui il Maclaurin, il d' Alembert, l' Eulero, e il nostro P. Fontana han saputo risolvere questo secondo caso, che del primo è assai più malagevole: ponendovi a calcolo non pure l' impressione del vento sull' ala, che il di lei moto di girazione. E tai lavori di quest' incliti Geometri meritano di essere consultati. Ma non pertanto coteste soluzioni non reggono punto, quando suppongasi, che il vento spiri impetuoso sulle mentovate ale, e che ne continui tal soffio. Poichè come nelle palle da cannone, che fendono velocissime l' aere, così nelle ale da mulino, sulle quali spiri im-

petuoso vento, l'impressione, che questi corpi ricevono dall'aria (1), non è come il quadrato della velocità della percossa, (sul qual principio fondasi il calcolo dei lodati Geometri), e come il seno dell'obbliquità di tal forza, ma in un'altra ragione, che tuttavia s'ignora. E poi l'aria rimbalzata dalle rotanti ale turba l'impeto, il numero, e la direzione dei successivi filamenti di esso fluido, che vanno a percuoterlo. E tale indagine eccede ogni nostr' arte.

§. 418. *Def. CII.* Una macchina dicesi *uniforme*, se le sue parti dall'azione della potenza, che le si adatti, ricevano moti equabili, o che questi sieno progressivi, o di rotazione. E se cotesti moti sieno variabili, ella si dirà *difforme*.

§. 419. *Scol.* Alla prima classe appartengonsi quelle macchine destinate a trarre dei gran pesi, le *mole frumentarie*, *i timpani calcatorii*, *gli ordigni usi dalle donne per filar lana*, *bambagia*, ec., *le ruote per far le corde*, *per aguzzare i coltelli*, ed altre simili. E del secondo genere sono le *trombe idrauliche*, cioè quelle macchine, onde l'acqua da' luoghi bassi si porta in alto, le *Cartiere*, le *Gualchiere*, e quelle in somma, che agiscono sulle resistenze con replicate percosse. Sicchè le macchine, che furono distinte in naturali, ed artificiali, in semplici e composte, esigevano quest'altra divisione per lo differente moto delle parti loro. La qual cosa si vuol intendere da

(1) Il signor Robins ha sperimentato che nelle palle da cannone la forza della percossa dell'aria, che esse fendono, sia in maggior ragione del quadrato della velocità loro.

voi non per mera erudizione, ma perchè in pratica siavi di guida la seguente teorica.

§. 420. Reg. VII. *In una macchina uniforme richiedesi tanta forza per serbarvi quel moto, che vi si è destato, benchè velocissimo, quanta le regole dell' equilibrio di essa ne prescrivono.*

Imperciocchè l' inerzia della macchina, cui siasi impresso un qualche moto, varrebbe da se sola a mantenervelo, se la resistenza e la frizione non lo affievolissero successivamente. Dunque una forza potente a reprimere i conati della resistenza e della frizione, e con ciò tanto poderosa, quanto le regole dell' equilibrio di essa macchina l' esigono, dovrà serbarvi quel primitivo moto. E quindi sarà vero, che nelle macchine uniformi richieggasi tanta forza a serbarvi il moto eccitato, quanta le regole dell' equilibrio loro ne prescrivono. E poi si renderà accelerato o ritardato un tal moto, secondo che a serbarvelo s' impieghi una forza maggiore, o minore di quella, che vien indicata dall' equilibrio della macchina.

§. 421. *Cor. I.* Con che se una macchina uniforme siasi talmente immaginata ed eseguita, che per alzar 100 rot., e per vincerne la di lei frizione ne basti una potenza di 10 rot. di energia, questa sarà eziandio sufficiente a mantenervi un qualche moto uniforme, che vi sarà stato eccitato.

§. 422. *Cor. II.* In una macchina uniforme ci vuole meno forza a serbarne quel moto, che vi si è destato, che a destarvelo.

§. 423. Reg. VIII. *Una macchina uniforme, in parità di altre circostanze, deesi pre-*

ferire ad una difforme. Ed in una macchina ch' è difforme tanto più si vantaggia, quanto rendansi meno variabili i suoi moti.

Quì sopra si è conchiuso, che ci vuol meno forza a serbarne in una macchina uniforme un moto eccitatovi, che ad eccitarvelo. Or il moto eccitato in una macchina difforme estinguesi in ogni istante per la gagliardìa della resistenza, ed in ogni istante deesi dalla potenza riprodurre. Dunque la potenza soffre più dispendio di forza in una macchina difforme, che in un'altra uniforme, quando le altre cose vadan del pari. E quindi le macchine uniformi sono preferibili alle difformi: e tra queste quella n'è migliore, che ha i suoi moti meno variabili: e ciò in parità delle altre circostanze.

§. 424. *Cor. I.* Dunque in una macchina composta di ruote, e di rocchetti non solo vuol procurarsi, che ciascuna di esse aggirisi equabilmente, ma che ogni ruota movente imprima equabilmente il suo moto a quell' altra, che ne muove. Ed a tal uopo i denti di queste ruote debbono avere una particolare figura, di che ha discorso Eulero nel Vol. V. *Comm. Nuov. di Pietroburgo.*

§. 425. *Cor. II.* E le macchine destinate ad agitare gli stantuffi delle trombe idrauliche, quelle, che a vicenda elevano e deprimono certi pestelli, e quell' altre, onde a colpi di martelli si gualgiscono i panni, o si fan delle carte, debbono essere con tal giudizio congegnate, che da' rimbalzi dei corpi percuzienti non iscuotasi la macchina; affinchè la potenza non vi soffra un inutile dispendio della sua forza.

§. 426. *Scol.* Per evitare lo scotimento, che

una macchina potrebbe ricevere dai rimbalzi dei martelli, che ella muove, i manubrii di questi sogliono farsi incurvati: imperciocchè assai fievole ritorna in tal caso dai martelli alla macchina il movimento.

§. 427. Reg. IX. *Se una macchina uniforme non abbia frizione, nè movimenti inutili; il momento di effetto sarà quanto quello d' impulsione.*

Qualora si prescinda dalla frizione di questa macchina, e da quei moti inutili, che sovente vi si eccitano a dispendio della potenza, non v' ha dubbio, che tutta l' energia della potenza debbasi impiegare alla promozione del peso, e che l' inerzia della macchina ne serbi il di lei moto. Dunque la forza impellente multiplicata per la sua velocità (1) adegua il prodotto del peso nella velocità di questo; cioè il momento d' impulsione è quanto quello di effetto (§§.408 e 410.).

---

(1) Per poco che si rifletta sulle macchine e sulle leggi dell' equilibrio loro, si vedrà, che supponendole immateriali debba essere la potenza alla resistenza come la velocità di questa alla velocità di quella: imperciocchè gli spazii, che in uno stesso tempo descrivono tali forze, sono inversamente come l' energie di queste. Così in un argano, ove suppongasi il raggio della ruota essere decuplo di quello del cilindro, si vedrà, che la velocità della potenza debba essere anche decupla di quella del peso, che vi si trae: e che prescindendovi da ogni resistenza della macchina, debba essere la potenza una decima parte di quel peso. E così convenevolmente ragionando nelle altre macchine potrà concludersi, che in ciascuna di esse la potenza e la resistenza debbano essere in ragione inversa delle velocità loro: onde il momento d' impulsione debba pareggiare quello di effetto.

§. 428. *Cor. I.* Dunque in tal caso al massimo momento d' impulsione dovrà corrispondere il massimo momento di effetto.

§. 429. *Cor. II.* E quindi con uno stesso momento d' impulsione volendosi animare ora una macchina, ed ora un' altra, non dovrà ottenersi, che uno stesso effetto: qualora si prescinda dalle frizioni, e da' moti inutili di queste macchine.

§. 430. Reg. X. *Tra le macchine uniformi animate con uno stesso momento d'impulsione giova sciegliere quella, che abbia la minima frizione, e dove non vi sia verun moto inutile al fine, cui ella destinasi.*

La verità di questa regola è chiara dalle cose precedenti. Dunque in pratica badisi ad evitare que' moti superflui, che si scorgono in una macchina fatta o da farsi: poichè non concorrendo essi in verun modo al fine della macchina, son di grandissimo dispendio alla forza della potenza.

§. 431. Reg. XI. *Una macchina, che facciasi dalle braccia degli uomini animare, vuol essere talmente fatta, che dia il massimo effetto col minimo debilitamento delle loro forze.*

Sì fatta investigazione dee essere meccanica e fisiologica, perchè vuol calcolarsi quanto si guadagni di forza in ciascuna di queste macchine, e di quanto restino spossate le braccia degli uomini, che la muovono. E da ciò potrà rinvenirsi la lunghezza delle stanghe di un dato argano, quella de' remi da porsi in una barca, il raggio di un timpano calcatorio, ec.

§. 432. Reg. XII. *Nelle macchine oltre a*

vantaggi meccanici, de' quali si è ampiamente ragionato ne' Cap. prec., e che si riducono a' risparmii di tempo e di forza, ve ne ha degli altri relativi a' fini particolari, cui esse destinansi, al luogo, ed al tempo, in che debbano agire, ad un risparmio economico nell' animarle, o ad altre esterne circostanze: le quali debbonsi attentamente conoscere, e calcolare da chi tali macchine proponga.

CAP. XXI.

DIMOSTRAZIONI DI ALCUNI PRINCIPII STATICI.

§. 433. *Def. CIII. Il centro di gravità di un sistema di corpi* è quel punto, intorno a cui essi dovrebbonsi equilibrare, se con verghe immateriali si unissero i centri di gravità loro.

§. 434. *Cor.* I corpi di questo sistema non sieno, che i due (fig. 49 n.° 2.°) soli A e B, e si tiri pe' loro centri di gravità A e B la retta AB, la quale si divida in C, sicchè i suoi segmenti AC e BC sieno come i pesi de' corpi B ed A; sarà C il centro di gravità de' corpi A e B (§.317.). E se vi si aggiunga il terzo corpo H, e si unisca la CH, la quale si divida in *c*, sicchè stia C*c* a *c*H come H ad A+B; sarà il punto *c* il centro di gravità de' tre corpi A, B, H. Imperciocchè tanto è che i corpi A e B sieno tra se disgiunti alla distanza AB, quanto che si trovassero raccolti in C centro di gravità di essi (§. 95.). E così può istituirsi il ragionamento per quattro corpi, per cinque, ec.

PROP. LXXVII. TEOR.

§. 435. *Se un sistema di corpi si trovi dalla stessa parte di un piano; la somma de' prodotti di ciascuno di essi nella distanza del di lui centro di gravità dal piano sarà uguale alla somma degli stessi corpi multiplicata per la distanza, che ha dal piano il centro di gravità del sistema.*

Dim. Cas. I. Questi corpi non sieno che i due soli (fig. 49. n. 1.°) A e B: ed abbassate sul piano xy le perpendicolari AD, BG, CF tanto da' centri di gravità di essi corpi, che dal punto C centro di gravità del loro sistema (le quali rette, com'è chiaro, giacciono in stesso piano), si distenda per C la retta MCN parallela a quella, che passa pei punti D e G. Saranno simili tra loro i triangoli ACM, BCN, e quindi AM a BN come AC a CB, o come B ad A (§. 434.): e sarà A. AM=B. BN. E poichè (A+B) CF è uguale ad A. MD+B.NG, per essere ciascuna delle MD, NG uguale alla CF: ed è poi A. MD=A.AD+A.AM, cioè uguale ad A. AD+B.BN; sarà (A+B) CF=A. AD+B.BN+B.NG=A. AD+B.BG.

Cas. II. Il proposto sistema abbia solo i tre corpi (fig. 49. n.° 2°) A, B, H; dai centri dei quali e dall' altro c del sistema si calino sul piano XY le perpendicolari AD, BG, HK, cf: e poi dal punto C, centro di gravità dei corpi A, e B, si meni CF perpendicolare sullo stesso piano. Sarà, per lo caso precedente, (A+B) CF=A. AD+B. BG. Ma il punto c, ch'è centro di gravità dei tre corpi A, B, H, è anche centro di gravità del corpo H e della somma

degli altri due posta in C (§. 434.). Dunque per lo caso precedente, sarà $(A+B+H)cf=(A+B)CF+H.HK=A.AD+B.BG+H.HK$. Per la qual cosa potendosi questo medesimo filo di dimostrazione applicare ad un sistema di quattro corpi, di cinque, di sei, ec., sarà vero quanto generalmente si è quassù proposto. C. B. D.

§. 436. *Def. CIV.* Il prodotto della massa di un corpo per la distanza del suo centro di gravità da un dato piano dicesi *momento di quel corpo rispetto ad esso piano.*

§. 437. *Cor. I. La somma dei momenti dei corpi di un sistema pareggia il momento della somma di essi corpi raccolta nel centro di gravità del sistema.*

§. 438. *Cor. II.* Dunque se le masse dei corpi di un sistema si chiamino A, B, C, ec., ed *a*, *b*, *c*, ec. sieno le rispettive distanze dei loro centri di gravità da un dato piano, da cui ne disti per *x* il centro di gravità del sistema; sarà $A.a+B.b+C.c+ec=(A+B+C+ec)x$. E sarà $x=(A.a+B.b+C.c+ec):(A+B+C+ec.)$.

§. 439. *Cor. III.* La verità esposta nel Cor. prec. ne fa conoscere il metodo con cui si suol determinare il centro di gravità nelle figure. « In » fatti sia (fig. 50.) BAD una qualunque fi» gura, che abbia per base la BD, e la CA » passi per lo punto medio di questa, e per lo » vertice A della figura. Le di lei sezioni NP, » *np* sieno vicinissime tra loro, e parallele alla » BD. Si potrà supporre, che la massa N*np*P » sia come un picciol peso, il quale abbia in » M*r* il suo centro di gravità, e che la retta » MR ne sia la distanza di questo centro dal

» piano RAG disteso per lo vertice della figura
» parallelo alla di lei base. Sicchè ponendo la
» sezione NP uguale a dy, e ad x la MR; sa-
» rà Mm uguale a dx, e lo spazio $NnpP$ sa-
» rà ydx, e posta la densità della figura ugua-
» le a D, sarà pure il peso della massa $NnpP$
» uguale a $Dydx$, e 'l momento di esso peso
» rispetto al piano RAG (§. 436.) dovrà es-
» sere $Dyxdx$. Dunque la distanza, che ha
» dal piano RAG il centro di gravità della figu-
» ra BAD, sarà uguale a $\frac{S.Dxydx}{S.Dydx}$, cioè a $\frac{S.yxdx}{S.ydx}$.
» Per la qual cosa se nei Problemi particolari
» integrisi tanto il numeratore, che il denomi-
» natore della rapportata frazione, *avrassi nella* CA *la distanza del centro di gravità della figura dal piano* RAG.

§. 440. *Cor. IV.* Di quì si rileva, che la formola generale, che ne dinota la distanza del centro di gravità di una linea, di una figura piana, di una superficie, o di un solido di rivoluzione uniformemente denso da un piano, che non interseghi quella linea, quella superficie, o quel solido, debba esserne generalmente dinotata da $\frac{S.yxdx}{S.ydx}$, ove ydx ne dinota un elemento del volume della linea, della superficie, o del solido, di cui vuol determinarsi il centro di gravità, ed x la distanza di quell' elemento dal detto piano.

§. 441. Esempio I. *Determinare il centro di gravità di una linea retta.*

Sol. Per l' estremo (fig. 51.) A della data

retta AB si distenda la retta CD perpendicolare ad AB, e presa nella AB la retticciuola FE infinitesima, si ponga $AB = a$, ed $AF = x$. Sarà $FE = dx$. Onde l'espressione $S.yxdx$ del §. prec. si ridurrà a $S.xdx$, e l'altra $S.ydx$ a $S.dx$. Il perchè la formola $\frac{S.xydx}{S.ydx}$ del §. prec. si trasforma in $\frac{S.xdx}{S.dx}$ nel caso proposto, cioè in $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$: $(x + C')$. Ma posto $x = o$ svanisce ciascuno di quei due integrali. Dunque dev'essere uguale a zero ciascuna delle due costanti C e C', e la distanza del centro di gravità della retta AB dalla CD dev'essere dinotata da ciò che ne diviene il fratto $\frac{x^2}{2x}$ ponendovi a per x; cioè da $\frac{a}{2}$. Dunque il centro di gravità di una linea retta è il punto medio di essa.

§. 442. *Cor. I.* E poichè il centro di gravità di un corpo è quel punto, pel quale passa la risultante di tutte le forze parallele di gravità, che ne investono le particelle del corpo stesso; l'è chiaro, che se una retta passi pei punti medii di più rette, in essa dovrà trovarsi il centro di gravità di tal sistema di rette (§. 96.).

§. 443. *Cor. II.* Dunque 1° il centro di gravità di un parallelogrammo dee essere il punto d'intersezione delle sue diagonali; poichè tal punto è quello, nel quale s'intersegano le rette, che congiungono i punti medii dei lati opposti. 2° Il centro di gravità di un cerchio, o di un el-

lisse dee trovarsi in ciascuno dei suoi diametri; e quindi tal centro dee essere quello della figura. 3° Il centro di gravità di un triangolo dee trovarsi nella retta, che congiunge il vertice di uno dei suoi angoli col punto medio del lato opposto; poichè tal congiungente divide per metà tutte le rette, che nello stesso triangolo si distendono parallele a quel lato. 4° E finalmente il centro di gravità di un trapezio, di cui due lati sono paralleli, dee trovarsi nella retta, che congiunge i punti medii dei lati paralleli.

§. 444. Esempio II. *Determinare il centro di gravità di un triangolo.*

Sol. Sia (fig. 52.) ABC il proposto triangolo, e pel vertice A di uno de' suoi angoli si distenda la retta EF parallela al lato opposto BC: si divida la BC in due parti uguali nel punto D, e si congiunga la DA. Di poi nella DA si prenda la retticciuola LM picciolissima, e condotte pe' punti L ed M le rette GLH, IMK parallele a BC, ovvero ad EF, si menino da' punti D ed L le rette DP, LO perpendicolari ad EF, e si ponga $BC=a$, $AD=b$, $DP=c$, ed $AL=z$. Dovrà stare $AD:DP::AL:LO$, ed $AD:BC::AL:GH$, e ponendo i simboli in queste due proporzioni, si avrà $b:c::z:LO$, e $b:a::z:GH$. Onde dev' essere $LO=\frac{cz}{b}$, e $GH=\frac{az}{b}$. Ma la retticciuola LN ne dinota il differenziale della retta LO. Dunque dev' essere $LN=\frac{cdz}{b}$. Il perchè il trapezietto GHKI, che può aversi come uguale al rettangoletto di GH in LN, dovrà esserne dinotato

dal prodotto di $\frac{az}{b}$ per $\frac{cdz}{b}$; cioè da $\frac{aczdz}{b^2}$. Dunque l' espressione ydx del §. 439. n' è dinotata da $\frac{aczdz}{b^2}$, mentre la x n' è rappresentata da LO, ch' è uguale a $\frac{cz}{b}$. Il perchè dev' essere $S.xydx = S.\frac{ac^2z^2dz}{b^3} = \frac{ac^2z^3}{3b^3} + C$, e $S.ydx = S.\frac{aczdz}{b^2} = \frac{acz^2}{2b^2} + C'$. Ma ciascuno de' due precedenti integrali sparisce qualora ne diviene $z=0$. Dunque dev' essere uguale a zero ciascuna delle due costanti C, e C'. E quindi nel proposto caso dev' essere $\frac{S.xydx}{S.ydx} = \frac{ac^2z^3}{3b^3} : \frac{acz^2}{2b^2} = \frac{2cz}{3b}$, e posto b in luogo di z in quest' ultima frazione si ottiene la distanza del centro di gravità del proposto triangolo della retta EF uguale a $\frac{2c}{3}$. Ma quella retta parallela ad EF, che dal punto P tronca dalla PD una porzione uguale ai due terzi di essa, tronca pure dalla AD, e dal punto A una parte uguale ai due terzi di AD. Dunque *il centro di gravità di un triangolo è quel punto della retta condotta dal vertice di uno de' suoi angoli al punto medio del lato opposto, che dista da esso vertice per due terzi di tal retta.*

§. 445. Esempio III. *Determinare il centro*

di gravità di un trapezio, di cui due lati sono paralleli.

Sol. I lati paralleli (fig. 53.) AB, DC del proposto trapezio ABCD si dividano per metà nei punti E ed F: si congiunga la FE, ed in essa si prenda la retticciuola MN picciolissima, e pei punti M ed N si distendano le rette GMH, LNK parallele ad AB; ovvero a DC: si prolunghino le due FE, CB finchè s'incontrino nel punto Q, e dai punti F ed M si menino le FR, MO perpendicolari ad AB. Intanto si ponga FC $=a$, EB$=b$, FE$=c$, FR$=e$, ed EM$=z$. Dovrà stare FC:EB::FQ:QE; e dividendo si avrà FC—EB:EB::FE:EQ, e ne' simboli $a-b:b::c:$ EQ. Dunque dovrà essere EQ$=\frac{bc}{a-b}$, FQ$=$FE $+$EQ$=c+\frac{bc}{a-b}=\frac{ac}{a-b}$, ed MQ$=ME+EQ=z+\frac{bc}{a-b}=\frac{bc+az-bz}{a-b}$. Ma sta FQ:QM::DC:GH, e ne' simboli $\frac{ac}{a-b}:\frac{bc+az-bz}{a-b}::2a:$ GH, ed FE: FR::ME:MO, cioè $c:e::z:$MO. Dunque dev'essere GH$=\frac{2bc+2az-2bz}{c}$, MO$=\frac{ez}{c}$, ed MP$=$D. MO$=\frac{edz}{c}$. E quindi il trapezietto GHKL dev'essere dinotato da $\frac{2bc+2az-2bz}{c}\times\frac{edz}{c}$, o sia da

$\frac{2bcedz+2aezdz-2bezdz}{c^2}$, e 'l prodotto di un tal trapezietto per MO da $\frac{2bce^2zdz+2ae^2z^2dz-2be^2z^2dz}{c^3}$. Il perchè dev' essere $S.xydx=S.\frac{2bce^2zdz}{c^3}+\frac{S.2ae^2z^2dz}{c^3}-\frac{S:2be^2z^2dz}{c^3}=\frac{bce^2z^2}{c^3}+\frac{2ae^2z^3}{3c^3}-\frac{2be^2z^3}{3c^3}+C=$ $\frac{3bce^2z^2+2ae^2z^3-2be^2z^3}{3c^3}+C$, e $S.ydx=$ $S.\frac{2bcedz+2aezdz-2bezdz}{c^2}=\frac{2bcez+aez^2-bez^2}{c^2}$ $+C'$. Ma ponendo $z=0$ svanisce ciascuno di quei due integrali, e quindi l' è uguale a zero sì C, che C'. Dunque dev' essere

$$\frac{S.xydx}{S.ydx}=\frac{3bce^2z^2+2ae^2z^3-2be^2z^3}{3c^3}:$$

$$\frac{2bcez+aez^2-bez^2}{c^2}=\frac{3bce^2z^2+2ae^2z^3-2be^2z^3}{6bc^2e^2z+3acez^2-3bcez^2}=$$

$\frac{3bcez^2+2aez^3-2bez^3}{6bc^2z+3acz^2-3bcz^2}$, e ponendo c in luogo di z, si avrà la distanza del centro di gravità del trapezio ABCD dalla retta AB uguale a $\frac{3bec^3+2aec^3-2bec^3}{3c^3(2b+a-b)}$, cioè a $\frac{be+2ae}{3b+3a}$, ch' è quarta proporzionale in ordine a $3b+3a$, a $b+2a$, e ad e, o sia in ordine a 3EB+3FC, ad

EB+2FC, e ad FR. Ma quella retta parallela ad AB, e distante da essa per la detta quarta proporzionale tronca dalla FE e dal punto E una retta, ch' è quarta proporzionale in ordine a 3AB+3DC ad AB+2DC, e ad FE. Dunque il centro di gravità del proposto trapezio è quel punto della retta FE, che dista dal punto E per la quarta proporzionale in ordine a 3AB+3DC, ad AB+2DC, e ad FE.

§. 446. *Cor. I.* Sia (fig. 54.) ABCD un trapezio, di cui i lati AB, DC sieno paralleli, e ad essi sia perpendicolare il lato BC. Egli è chiaro, che se colla retta EK si congiungano i punti medii dei lati paralleli AB, DC, e dal punto E si meni la EL perpendicolare sulla AB, dovrà essere EL uguale a BC, e KL uguale ad $\frac{1}{2}$ AB $-\frac{1}{2}$ DC. Ma il centro di gravità G del trapezio ABCD trovasi nella retta EK, e dista dal punto E per la quarta proporzionale, che rinviensi in ordine a 3DC+3AB, a DC+2AB, ed a KE, e con ciò dista dal punto K per la quarta proporzionale trovata in ordine a 3DC+3AB, a 2DC+AB, ed a KE. Dunque se dal punto G si meni sulla AB la perpendicolare GF, dovrà stare pure 3DC+3AB : 2DC+AB :: EL : GF :: KL : KF. Il perchè se pongasi DC=BH=b, ed HA =p; dovrà essere KL$=\frac{1}{2}p$, 3DC+3AB$=6b+3p$, 2DC+AB$=3b+p$; e quindi $6b+3p : 3b+p :: \frac{1}{2}p$: KF$=\frac{3bp+p^2}{12b+6p}$. Onde essendo KA$=\frac{b+p}{2}$, KF

$= \frac{3bp+p^2}{2(6b+3p)}$, ed LE=BC=$e$; sarà KA+KF=
FA=$\frac{6b^2+12bp+4p^2}{2(6b+3p)} = \frac{3b^2+6bp+2p^2}{6b+3p}$ ed $\frac{1}{2}p:e::$
$\frac{3bp+p^2}{12b+6p^2}$: FG=$\frac{3be+pe}{6b+3p}$.

§. 447. *Cor. II.* Il centro di gravità di un prisma, di cui ciascuna delle basi è un trapezio, che ha due lati paralleli, è il centro di gravità di quella sezione di un tal solido, ch'è parallela alle sue basi, ed equidistante da esse.

§. 448. Esempio IV. *Supposto che il lato* (*fig.* 55. *n.*° 1.°) AB *del rettangolo* ABCD *sia diviso nelle tre parti* AE, EF, FB, *di cui la prima e la terza sieno uguali, e sulla media* EF *sia costruito il rettangolo* EFGH, *e poi sopra i rettangoli* ABCD, EFGH *sieno eretti rispettivamente un parallelepipedo rettangolo, ed un prisma triangolare di una stessa altezza, e sieno perpendicolari al piano* AHGC *que' lati del prisma distesi pe' punti* E *ed* F; *fa duopo determinare il centro di gravità dell' intiero solido, che poggia sul rettilineo* AEHGFBCD.

Sol. Pel punto medio O della retta HG si distenda la retta OL parallela ad AD, che incontri la DC nel punto L, e per la retta OL si distenda un piano perpendicolare all' altro AHGC. Sarà la sezione (fig. 55. n.° 2.°) di quel piano colla superficie del solido un trapezio OLKF, avente i lati OL, KF paralleli: il punto medio M di una delle diagonali del rettangolo FKLT sarà il centro di gravità del pa-

rallelepipedo, che ha per base il rettangolo (fig. 55. n.° 1.°) ABCD, ed il punto (fig. 55. n.° 2.°) N, che si prende nella retta condotta dal punto F al punto medio della TO alla distanza dal punto F di due terzi di tal retta, sarà il centro di gravità del prisma triangolare, che ha per base il rettangolo (fig. 55. n.° 1.°) EHGF.

Ciò posto. Si congiunga la (fig. 55. n.° 2.°) MN, e da' punti M ed N sulla LO si menino le perpendicolari MQ, NS, e si ponga $FT=a$, $LT=AD=b$, $GF=OT=c$, $AB=d$, ed $HG=p$.

Dovrà essere $MQ=\frac{1}{2}FT=\frac{1}{2}a$, $QT=\frac{1}{2}LT=\frac{1}{2}b$, $TS=\frac{1}{3}TO=\frac{1}{3}c$, $NS=\frac{1}{3}TF=\frac{1}{3}a$, $MN=\sqrt{((MQ-NS)^2+SQ^2)}=\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c\right)^2\right)}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{36}+\frac{b^2}{4}+\frac{bc}{3}+\frac{c^2}{9}\right)}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(a^2+9b^2+12bc+4c^2\right)}$, il volume del parallelepipedo, che tien per base il rettangolo ABCD, uguale ad abd, e quello del prisma triangolare, che ha per base il rettangolo HEFG uguale ad $\frac{1}{2}acp$. Dunque se P ne dinoti il centro di gravità dell' intiero solido, che poggia sul rettilineo AEHGFBCD, dee stare $abd+\frac{1}{2}acp:\frac{1}{2}acp$, o sia $2bd+cp$:

$cp :: \frac{1}{6} \sqrt{(a^2+9b^2+12bc+4c^2)}$:MP. Il perchè dovrà essere

$$MP = \frac{cp\sqrt{(a^2+9b^2+12bc+4c^2)}}{12bd+6cp}.$$

Ma sia pure MN : MP::QS:QR , ed MN:MP:: MQ—NS:MQ—PR. Dunque dee stare $2bd+cp$: $cp :: \frac{1}{2} b+\frac{1}{3} c$: QR , $2bd+cp$:cp:: $\frac{1}{2} a-\frac{1}{3} a$: MQ—PR:: $\frac{1}{6} a$:MQ—PR. Il perchè dev' essere

$$QR = \frac{3bcp+2c^2p}{12bd+6cp},$$

ed $MQ-PR = \frac{acp}{12bd+6cp}$.

E quindi essendo $QO = QT+TO = \frac{1}{2} b+c$, ed $MQ = \frac{1}{2} a$, dovrà essere $RO = \frac{1}{2} b+c-$
$\frac{3bcp+2c^2p}{12bd+6cp} = \frac{6b^2d+12bcd+4c^2p}{12bd+6cp} =$
$\frac{3b^2d+6bcd+2c^2p}{6bd+3cp}$, e $PR = \frac{1}{2} a - \frac{acp}{12bd+6cp} =$
$\frac{6abd+2acp}{12bd+6cp} = \frac{3abd+acp}{6bd+3cp}$.

§. 449. Esempio V. *Determinare il centro di gravità di una conoide parabolica.*

Sol. E poichè il centro di gravità di un so-

lido di rivoluzione (fig. 56.) ADOH uniformemente denso si trova nell' asse AC di esso, ed a tal distanza dal piano MAN disteso pel vertice A dello stesso solido parallelo alla base DOH, che uguaglia l' espressione $\frac{S.yxdx}{S.ydx}$ (§. 440.), ove la x ne dinota l' ascissa AB presa sull' asse di rivoluzione AC dal vertice A, e la y rappresenta la sezione EF fatta dal piano condotto pel punto B parallelo alla base DOH del solido, ed ove dopo le integrazioni convien fare la x uguale ad AC; l' è manifesto, che se il solido ADOH ne dinoti una conoide parabolica, di cui l' asse AC sia uguale ad a, ponendo AB $=x$, BE$=z$, il parametro principale della parabola uguale a c, e dinotando con $1:p$ il rapporto del raggio alla circonferenza di un cerchio, dovrà essere la circonferenza del cerchio EF$=pz$, e la superficie di esso uguale a $\frac{pz^2}{2}$. Ma per la natura della parabola l' è $z^2=cx$. Dunque lo stesso cerchio EF dev' essere dinotato da $\frac{pcx}{2}$. Onde se nell' espressione $\frac{S.yxdx}{S.ydx}$ si ponga $\frac{pcx}{2}$ in luogo di y, si avrà la distanza del centro di gravità della conoide parabolica ADOH dal piano MAN uguale a $\frac{\frac{S.pcx^2dx}{2}}{\frac{S.pcxdx}{2}}$, aggiungendo a ciascuno de' due in-

tegrali le costanti corrispondenti, le quali si debbono prendere nell' ipotesi, che l' integrale sparisca quando x è uguale a zero, e ponendo dopo l' integrazione $x=a$. Ma l' è

$$S.\frac{pcx^2dx}{2}=\frac{pcx^3}{6}+C, \text{ e } S.\frac{pcxdx}{2}=\frac{pcx^2}{4}+C',$$

e ciascuno di questi integrali sparisce quando x si fa uguale a zero. Dunque ciascuna delle costanti C, e C' è uguale a zero. Il perchè il centro di gravità della conoide parabolica ADOH dee trovarsi nel di lei asse AC, ed a tal distanza dal vertice A, quanta ne diviene l' espressione $\frac{pcx^3}{6}:\frac{pcx^2}{4}$, ponendovi $x=a$, o sia alla distanza di $\frac{pca^3}{6}:\frac{pca^2}{4}$, cioè di $\frac{2}{3}a$.

PROP. LXXVIII. TEOR.

§. 450. *Se i corpicciuoli* (fig. 57.) M, M', M'', ec. *sieno rispettivamente animati dalle forze consenzienti* f, f', f'', ec. *per direzioni parallele; il loro comune centro di gravità* C *avrà lo stesso moto, che se in* C *s' intendessero raccolti tutti que' corpicciuoli, ed animati da una sola forza quanto la somma delle loro forze* f, f', f'', ec. *e per una direzione parallela alle loro direzioni.*

Dim. Concepiscasi, che que' corpicciuoli nel tempuscolo dt abbiano rispettivamente percorsi gli spazietti Mm, M'm', M''m'', ec., mentre il loro centro di gravità C n' è disceso in c: e

che questi spazietti, i quali per ipotesi son paralleli, protratti in su incontrino ad angoli retti un piano disteso per la retta ABQD, ovunque ella ne stia. Sarà (§. 435.) $M.MA+M'.M'B+M''.M''D+ec.=(M+M'+M''+ec.)CQ$. E per la stessa ragione sarà pure $M.mA+M'.m'B+M''.m''D+ec.=(M+M'+M''+ec.)cQ$. Dunque togliendo quella equazione da questa, si avrà

$$M.Mm+M'.M'm'+M''.M''m''+ec.=(M+M'+M''+ec)Cc:$$

e quindi sarà

$$Cc=(M.Mm+M'.M'm'+M''.M''m''+ec.):(M+M'+M''+ec.) \;.\;.\;.\;.\; (A)$$

Or gli spazietti Mm, $M'm'$, $M''m''$, ec. descritti da'divisati corpicciuoli nel tempuscolo dt (§. 26.) sono come le velocità loro, e queste (§. 61.) come $f:M$, $f':M'$, $f'':M''$, ec. rispettivamente. Dunque saranno gli spazietti Mm, $M'm'$, $M''m''$, ec. come $f:M$, $f':M'$, $f'':M''$, ec. E sostituendo nell' equazione (A) queste grandezze in luogo di quegli spazietti, avremo $Cc=(f+f'+f''+ec.):(M+M'+M''+ec.)$.

Ma di tal grandezza sarebbe altresì lo spazietto, che nel tempuscolo dt (§. 61.) vi descriverebbe la massa concentrata de' corpicciuoli M, M', M'' ec. spinta per Cc da una forza uguale ad $f+f'+f''+ec.$ Dunque tant'è il moto de' corpicciuoli M, M', M''ec. rispettivamente animati dalle forze f, f', f'', ec. per direzioni parallele tra loro, e consenzienti, quanto quello, che vi si ecciterebbe concentrandoli nel centro di gravità del loro sistema, e spignendoli con una sola forza uguale alla somma delle date, e per la direzione loro. C. B. D.

§. 451. *Cor*. Tutti gli elementi di uno stesso corpo son tratti all'ingiù per direzioni verticali, e con ciò parallele tra loro. Dunque si potrà *concepire, che tal corpo graviti sul solo centro di gravità, e che quivi come in proprio seggio raccolgasi ogni suo peso, e gravezza.*

PROP. LXXIX. TEOR.

§. 452. *La leva immateriale* (*fig.* 58.) QAD *sia onusta de' due pesi* B, D *inegualmente distanti dal centro* Q *di rotazione; dico essere la somma de' momenti loro nell' aggirarla intorno a* Q, *quanto il momento di essi pesi rammassati nel centro di gravità loro.*

Dim. Pel punto Q si tiri un piano perpendicolare a QD; sarà (§. 435.) B.BQ+D.DQ =(B+D).CQ. Cioè i momenti de' corpi B, e D saranno uguali al momento della loro somma applicata in C (§. 306.) centro di gravità di essi. C. B. D.

§. 453. *Cor.* Di quì si rileva, che *il momento di un solido, il quale faccia leva intorno ad una di lui sezione, sia quanto l'intera massa del solido multiplicata per la distanza del di lui centro di gravità dalla sezione.*

PROP. LXXX. PROBL.

* §. 454. *Ritrovare il centro di oscillazione di una verga rigida immateriale* QABD, *che abbia i pesi* A, B, D, ec. *a disuguali distanze dal di lei estremo* Q, *ov' è sospesa.*

Sol. La somma de' momenti d' inerzia de' pesi A, B, D, ec. dividasi per la somma de' mo-

menti degli stessi pesi (§§. 435, 437.); sarà tal quoto la cercata distanza del centro di oscillazione dal punto di sospensione.

Dim. Il punto C della verga QABD sia l'addimandato centro di oscillazione : CQ la sua distanza dal punto Q di sospensione: e questa retta si chiami x; sarà eziandio uguale ad x la lunghezza di quel pendolo semplice, che avendo nel suo estremo inferiore un qualunque peso P, ne sia isocrono a questa verga oscillante (§. 216.). In oltre il pendolo semplice, e la data verga intendansi rimossi ad angoli uguali da' loro perpendicoli, di dove si lascino insieme cadere. Saranno tra se uguali quelle velocità angolari, che alla fine di uno stesso tempo avran concepute questi due corpi oscillanti. Ma la velocità angolare del pendolo semplice (§. 380.) è uguale a $Px : Px^2$, cioè ad $\frac{1}{x}$, e la velocità angolare della verga è quanto

$$(A.\,AQ + B.\,BQ + D.\,DQ + ec.) :$$
$$(A.\,AQ^2 + B.\,BQ^2 + D.\,DQ^2 + ec.).$$

Dunque dev' essere

$$x = \frac{A.AQ^2 + B.BQ^2 + D.DQ^2 + ec.}{A.AQ + B.BQ + D.DQ + ec.} \ldots \text{C. B. F.}$$

* §. 455. *Cor. I.* Nella soluzione di questo Problema contiensi una facilissima ed elegante regola, onde determinare i centri di oscillazione. Cioè *in una verga rigida, che onustà di più pesi oscilli intorno ad un di lei estremo, avrassi la distanza di quest' estremo dal centro di oscillazione, se la somma de' momenti*

d' inerzia di que' pesi dividasi per la somma de' momenti degli stessi pesi.

* §. 456. *Cor. II.* Quel pendolo semplice, e la verga QBD intendansi rimossi ad angoli uguali da' loro perpendicoli, e quivi lasciati insiem cadere; saranno tra se uguali le velocità angolari di questi corpi oscillanti (§.454.). Di più *il centro di oscillazione della verga avrà l' identico moto, e l' identica accelerazione del peso* P *di esso pendolo* (§. 216.). Ed in terzo luogo *i corpi* A, B, D, ec., *de' quali è caricata la verga, avranno disuguali velocità, e diverse forze acceleratrici.*

* §. 457. *Cor. III.* Le velocità, che hanno i pesi A, B, D, ec. in ogni momento dell'oscillazione della verga rigida QAD, sono sempre come le QA, QB, QD: lo che è chiaro da per se stesso. Dunque *in questa ragione dovranno essere le forze acceleratrici de' corpi* A, B, D, ec. (§. 177.).

* §. 458. *Scol.* Oltre al centro di oscillazione di un corpo, che si aggira intorno ad un asse, suol considerarsi da' Meccanici un altro punto, che chiamasi *centro di percossa*: ed è quello pel quale passa la risultante delle forze di tutte le particelle del corpo. Questo centro nella più parte dei casi coincide con quello di oscillazione. Ma poichè la distanza del centro di oscillazione dall' asse di rotazione vien determinata dalle forze acceleratrici delle diverse particelle del corpo, e nei mezzi di diverse densità, cangiandosi la gravità specifica delle diverse particelle, debbono variare ancora le di loro forze acceleratrici, e quindi dee variare pure la distanza del centro di oscilla-

zione dall' asse di rotazione; laddove la distanza del centro di percossa dall' asse di rotazione dipendendo dalle velocità rispettive di tutte le particelle intorno a quell' asse ; l' è chiaro, che il centro di percossa non dee cangiar di sito nei differenti mezzi.

PROP. LXXXI. TEOR.

§. 459. *Il centro di gravità del sistema de' corpi* (*fig.* 59.) A , B , C , ec. *che in virtù de' loro pesi si son ridotti all' equilibrio , è sempre nella massima , o nella minima elevazione da un piano orizzontale* FH.

Dim. Sia O il centro di nostra Terra , e P quello di gravità del sistema de' corpi A , B , C , ec. , i quali siensi trasferiti ne' luoghi α, β , γ , ec. , quando un picciol moto sia stato loro impresso : e 'l centro P del sistema si sia nello stesso tempo trasportato in π. Si uniscano le rette OA , Oα , OB, Oβ , OC , Oγ, ec., e col centro O e co' rispettivi intervalli Oα, Oπ , Oβ, OC , ec. si descrivano gli archetti circolari αa , πv , βb, Cc, ec. Saranno le retticciuole Aa, Bb , γc , ec. gli spazietti di accesso (§. 106.), o di recesso dei corpi A , B , C , ec. , e Pv quello del centro di gravità del sistema.

Ciò posto. Essendo pressocchè infinita la distanza , che ha dal centro di nostra Terra l' orizzonte FH , rispetto alla linea Ff; si potranno aver per uguali le rette OF , Of : dunque sarà AF—αf=OA—Oα=Aa : e quindi A.AF—A.αf=A.Aa. E dimostrando nello stesso modo , che sieno B.BG—B.βg=B.Bb , e C.γh—C.CH =C.γc , ec. ; sarà A.Aa+B.Bb+C.γc+ ec. =A.

$AF + B.BG + C.\gamma h +$ ec. $- A.\alpha f - C.\beta g - C.CH -$ ec. Ma i prodotti positivi, che scorgonsi nel secondo membro di questa equazione, (§. 435.) sono uguali ad $(A+B+C+$ec.$)$ PK; ed i negativi uguali ad $(A+B+C+$ec.$)(-\pi k)$, e questi e quelli insieme presi fanno $(A+B+C+$ec.$)$ $(PK-\pi k)$, cioè a dire $(A+B+C+$ec.$)P\nu$. Dunque sarà $A.Aa+B.Bb+C.\gamma c+$ec.$=(A+B+C$ $+$ec.$)$ $P\nu$, e quindi il secondo membro di questa equazione sarà zero, come lo è il primo (§. 108.): e dovrà essere zero la $P\nu$, ch'è lo spazietto di accesso, o di recesso del centro P del sistema. Ma quando il differenziale di una grandezza variabile diviene zero ella dee essere nel massimo, o nel minimo grado. Dunque la PK elevazione del centro del sistema dall' orizzonte FH dovrà essere massima, o minima, quando i corpi in virtù dei proprii pesi siensi ridotti all' equilibrio. C. B. D.

§. 460. *Scol.* Il centro di gravità de' corpi, che reggonsi in equilibrio fermo (§. 263.), è sempre nella minima elevazione da un sottoposto piano orizzontale: e n'è poi nella massima elevazione il centro di quegli altri, che sostengonsi in equilibrio labile. Così (per indicarvelo con qualch' esemplo) prendete un cono retto, che sia di materia dura ed omogenea, e ponetelo colla sua base su di un fermo piano orizzontale. Esso dovrà serbarvi un equilibrio stabile, e 'l suo centro di gravità starà elevato da quel piano per un quarto dell' altezza, o dell' asse dello stesso cono (§. 440.): e si farà maggiore cotesta elevazione, se alquanto lo scuoterete. Ma se vi riesca di farvi reggere il cono

col piano della sua base in alto, e col vertice all'ingiù; esso dovrà tenervi un equilibrio labile, e 'l centro di gravità del cono si troverà erto su quel piano all'altezza di tre quarti dell'asse del cono, vale a dire più di prima: ed esso centro verrà a deprimersi, sol che scuoterete un poco lo stesso cono.

Similmente se *con delle corde ritengasi pensile un gran peso, il vedrete oscillare da principio, ma ridotto all' equilibrio, avrà il suo centro di gravità basso quanto più può esserlo.* La qual cosa dovrà esservi come sicurissimo principio, onde determinare il sito, che prenderà questo corpo quando siasi fermato.

C A P. XXII.

SOLUZIONI DI ALCUNI PROBLEMI SULLE SPINTE, CHE RICEVONO LE MURA DA QUEI GRAVI CHE VI SI APPOGGIANO.

PROP. LXXXII. TEOR.

§. 461. *La verga rigida* (*fig.* 60.) AB, *ch' è gravata in* C *del peso* P, *sia fortemente ritenuta nel suo estremo inferiore* B, *e coll' estremo superiore si appoggi al muro* AD *inclinandovisi sotto l' angolo* DAB$=\phi$, *che stia in un piano verticale*; *dico essere la spinta orizzontale, che ella ne fa sul muro, al peso.* P, *come il seno di* 2ϕ *al raggio*, *e come la metà del segmento inferiore* BC *della verga all' intiera lunghezza di essa.*

Dim. La retta verticale CF esprima il peso del corpo P: e calata dal punto F la FQ per-

pendicolare alla verga AB, si compia il parallelogrammo CQFR. All'estremo superiore della verga le si eriga la perpendicolare AM quarta proporzionale in ordine alle rette BA, BC, ed al lato CR del riferito parallelogrammo: e la stessa AM stia nel piano verticale ADB condotto per le due rette AB, CF. E finalmente abbassata da M la MN perpendicolare al muro AD, e quindi alla verticale condotta per A, si compia il parallelogrammo MNAG.

Ciò premesso. La forza CF, ond' è gravata la verga in C, equivale alle due forze CQ, CR. Ma la prima di queste n' è interamente distrutta dall' invincibile ritegno B. Dunque l' altra CR cercherà d' aggirar la verga intorno a B, e 'l momento, che avrà questa forza in A, sarà quanto AM: conciosiacchè si è presa AM:CR::BC:BA (§. 306.). E risolvendo la forza AM nelle laterali AN, AG, di cui la prima distruggesi interamente, perchè esercitata per una direzione verticale sul muro AD; dovrà l' altra forza GA rappresentare quella spinta orizzontale, che fa la verga al muro.

Or i triangoli GAM, CFR sono simili al triangolo DAB, come scorgesi chiaramente, e sono tra se uguali i loro angoli GAM, CFR, BAD. Dunque starà GA:AM::cos.ϕ:1. Ma è per costruzione AM:CR::BC:BA, ed è poi CR:CF::sen.ϕ:1. Dunque componendo si avrà GA:CF::(cos.ϕ:1) (BC:BA) (sen.ϕ:1), cioè GA:CF::(2.sen ϕcos.ϕ:) $\left(\frac{1}{2}\text{BC:BA}\right)$. Val quanto dire la spinta orizzontale, che fa la verga sul muro; sta al peso

P, di cui n' è gravata, come il seno del doppio angolo BAD al raggio, e come la metà del segmento inferiore BC della verga all' intiera di lei lunghezza C. B. D.

§. 462. *Cor. I.* Pongasi $AB=a$, e $CB=b$: si chiami P il peso, che pende da C, ed S la spinta orizzontale, che fa la verga sul muro AD;

sarà $S:P::(\text{sen}.2\varphi:1)\left(\frac{1}{2}b:a\right)$. E quindi sarà $S=(b\text{P}\,\text{sen}.2\varphi):2a$.

§. 463. *Cor. II. E questa verga farà la massima spinta sul muro quando l' angolo* BAD *sia di* 45°. Imperciocchè in tal caso è $\text{sen}.2\varphi=\text{sen}.90°=1$, ch' è il massimo seno, e la spinta S ne diviene uguale a $bP:2a$.

§. 464. *Cor. III.* Si prolunghi AB in O fintantochè BO adegui CQ, e calata la retta OK perpendicolare su di DB si compia il rettangolo BKOL. Sarà la forza CQ, o la BO equivalente alle due BK, BL. Laonde se DB rappresenti un piano orizzontale fermo ed immobile, che sia potente ad elidere la forza BL esercitata perpendicolarmente contro ad esso, vi resterà l' altra forza BK, ch' è la spinta orizzontale esercitata dalla verga contro al ritegno B.

§. 465. *Cor. IV.* E poichè sta $BK:BO::\text{sen}.BOK:1$, cioè $BK:BO::\text{sen}.\varphi:1$, ed è poi BO, o $CQ:CF$ come cos.FCQ al raggio, cioè come $\cos.\varphi:1$; sarà componendo $BK:CF::\text{sen}.\varphi\,\cos.\varphi:1$. E quindi chiamando s questa spinta orizzontale, che fassi dalla verga contro il ritegno B; sarà $s:P::\text{sen}.\varphi\cos.\varphi:1$, ed $s=P\,\text{sen}.\varphi\,\cos.\varphi=\frac{P\,\text{sen}.2\varphi}{2}$.

§. 466. *Cor. V.* Dunque le spinte S, ed s rispettivamente uguagliano $\frac{b\text{Psen.}2\varphi}{2a}$, e $\frac{\text{Psen}2\varphi}{2}$. E con ciò dee stare $S:s::b:a$.

§. 467. *Cor. VI.* Di quì si possono raccorre molte verità particolari, le quali non si limitano ad una vana, e sterile speculazione, anzi ne fanno intendere per iscienza, di che valore sieno le spinte orizzontali fatte da certi corpi appoggiati a' muri (come sono i tetti degli edifizii, i puntelli delle pareti rovinanti, ed altri simili corpi), e quanto le loro pressioni verticali. In fatti sia AB la lunghezza di una trave prismatica, ed omogenea, sicchè il di lei centro di gravità stia in mezzo ad AB: sarà AC=CB, cioè $b=\frac{1}{2}a$: e detto P il di lei peso, e φ l'angolo, ond' essa appoggiasi ad un vicino muro, sarà pel §.462. $S=\left(\frac{1}{2}a\text{Psen}2\varphi\right):2a=\frac{\text{Psen.}2\varphi}{4}$, cioè

§. 468. Teor. *Se una trave prismatica, ed omogenea sia fortemente ritenuta nel suo estremo inferiore, e col superiore si appoggi ad un vicino muro; la spinta orizzontale, che farà sul muro cotesta trave, sarà una quarta parte del di lei peso moltiplicata per lo seno del doppio angolo dell' inclinazione al muro. E la massima spinta orizzontale, ch' essa può far sul muro (lo che si verifica, quando l'angolo d' inclinazione sia di 45°), sarà un quarto di quel peso.*

PROP. LXXXIII. TEOR.

§. 469. *Sia* (*fig.*61.) ACB *una qualunque leva angolare, che in virtù del peso* P *pendente dal suo angolo mantengasi in sito verticale tra'l muro* AL, *e'l ritegno* B; *dico essere uguali le spinte orizzontali, ch' essa fa contro al muro ed al ritegno. E che il peso* P *stia a ciascuna di queste spinte, come il seno dell' angolo della leva al prodotto de' seni degli angoli, che fanno le braccia della leva colla direzione del peso.*

Dim. La retta CF dinoti la gravità del corpo P, e condotte per F le due FH, FK respettivamente parallele alle braccia CA, CB della data leva, si prolunghino le stesse CA, CB in T, ed O, sinchè AT, e BO sieno respettivamente uguali a CK, e CH. E finalmente pe' punti T, ed O si tirino le rette verticali TR, OM, che incontrino in R ed M le orizzontali RAV, LBM distese per gli estremi A, e B della data leva, e si compiano i parallelogrammi ARTS, BMOD.

E poichè la forza CF equivale alle due CK, CH; la leva spingerà nel punto A il piano AL con una forza proporzionale a CK, o ad AT. Dunque risolvendo questa forza nelle sue laterali AS, AR, la AR dinoterà la spinta orizzontale per AR, che la leva gravata dal peso P fa sul piano AL: imperciocchè la prima forza AS n'è interamente distrutta dalla fermezza del muro AL, contro al quale essa agisce verticalmente. E con simile ragionamento si verrà a concludere, che sia BM la spinta orizzontale, che vi fa contro al ritegno B l'altro braccio CB della leva. E poichè CF sta a CK, o alla di

lei uguale AT, come il seno dell' angolo KCH al seno dell'altro FCH (§. 84.): ed è poi AT ad AR come il raggio, che si uguagli ad 1, al seno dell' angolo ATR, o del di lui alterno FCK; sarà, componendo queste ragioni, CF ad AR come il seno di KCH al prodotto de' seni degli angoli FCH, FCK. E dimostrando nello stesso modo, che CF stia a BM, come il seno dell' angolo KCH al prodotto de' seni degli angoli FCK, FCH; sarà CF:AR::CF:BM, e quindi AR uguale a BM. Dunque le divisate spinte saranno uguali, e 'l peso del corpo P starà a ciascuna di esse, come il seno dell' angolo della leva al prodotto de' seni degli angoli, che fanno le di lei braccia colla direzione del peso. C.B.D.

§. 470. *Cor.* Si chiami ϕ l' angolo CAV, e θ l' altro CBL, o il suo uguale CVA. Sarà l'angolo esterno ACN, che ne pareggia i due CAV, CVA del triangolo ACV, uguale a $\phi+\theta$, e 'l seno di KCH, ch' è quanto quello del suo conseguente ACN, sarà uguale a sen.$(\phi+\theta)$. Di più essendo l' angolo ACQ complemento dell'altro CAQ, sarà il seno di ACQ uguale a cos.ϕ: e per la stessa ragione sarà anche il seno di HCF uguale a cos.θ. Dunque se la forza CF si chiami P, sarà P:AR::sen.$(\phi+\theta)$: cos.ϕ cos.θ : e quindi AR, o la sua uguale BM sarà (Pcos.ϕcos.θ): sen.$(\phi+\theta)$.

§. 471. *Scol.* Da questi principii il signor Nicolò Fuss (1) ha saputo calcolare le forze, e 'l

---

(1) Vedi il *Volume di Pietrob. per l' an.* 1778, ove leggesi una Dissertazione di questo Geometra, che ha per titolo *Invenire vires, quas in anterides exerit compages ex quotcumque trabibus confecta.*

sito, onde sostiensi una compage di travi attaccate ne' loro estremi, sicchè formino un mezzo poligono posto in sito verticale, e cogli angoli all' ingiù rivolti.

CAP. XXIII.

DELLA RESISTENZA DE' SOLIDI ALLA ROTTURA.

§. 472. *Def. CV.* La forza, che induce la rottura in una trave prismatica o cilindrica, di qualunque materia essa sia, e le cui fibre sono parallele all'asse, dicesi *svellente*, se la sua direzione coincida coll'asse di quel prisma o cilindro, in che essa è conformata; e tal forza si dirà *rompente*, se la sua direzione sia comunque inclinata a quell'asse. La massima renitenza, che fa poi la trave alla frattura nel primo caso dicesi *resistenza assoluta*, e nell'altro *relativa*.

§ 473. *Cor.* La resistenza assoluta di un solido prismatico si misura da quel peso, che posto nell' estremità di esso solido fitto per di sopra in una volta, vale a spezzarlo.

§. 474. Princ. I. *Quando frangesi una trave di legno saldamente fitta in un muro, e gravata da soverchio peso, le sue fibre, cioè quei suoi filamenti, che vi stan per lungo, han dovuto avere la massima distensione nell' istante antecedente alla frattura.* Cioè a dire, *non può succedere frattura nel legno senza la distrazione delle di lui fibre.*

§. 475. Princ. II. *Nello svellimento di una trave frangonsi quasi in un istante le di lei fibre, dopo di aver sofferto la massima di-*

stensione di che son capaci. Ma quando ella si rompe, cioè frangesi di traverso, si spezzano prima le fibre più tese, e poi le altre successivamente.

§. 476. Il gran Galilei suppose, che in un solo istante si strappino le fibre di quel solido, che frangesi di traverso. Il Mariotte, il Leibnitz, e 'l Varignonio ammaestrati dalla sperienza stabilirono, che prima di rompersi una trave vi si debbano distendere le di lei fibre con forze proporzionali alle loro distanze dal centro di moto. E Giacomo Bernoulli non pago di queste supposizioni vi aggiunse, che al rompersi di una trave, alcune di lei fibre vicino al centro di moto debbansi comprimere, e distendere le più remote. Ma la seconda di queste ipotesi sembra più verisimile delle altre, ed è stata anche seguita dall' Eulero in una Mem. dell' Acc. di Pietrob. dell' anno 1776.

§. 477. Princ. III. *La tensione di una fibra, e con ciò la di lei forza di contrarsi, è proporzionale all' allungamento, che se l'è recato.*

§. 478. Quest' ipotesi, ch' è assai plausibile, fu rigidamente dimostrata da Giacomo Bernoulli in una dissertazione, ch'è nelle Memorie dell'Acc. delle Scien. dell' anno 1705.

§. 479. Princ. IV. *Qualora una verga rettilinea saldamente fitta a squadra in un muro siasi incurvata per l' azione di un peso, che penda dal suo estremo; il momento della pressione di ciascun suo elemento è proporzionale alla di lui distanza dalla direzione del peso.*

§. 480. Rappresenti (fig. 62.) ACB una verga elastica, ed ugualmente grossa, che in A sia

fitta saldamente nel muro, ed in B aggravata dal peso P, onde da rettilinea, che ella era, s' incurvi. Dal punto B, da cui pende il peso P, si cali sul muro la perpendicolare BL: e'l piano verticale PBL intendasi disteso al di sopra della BA, onde si formi in essa verga l' armilla A*a*B*b* terminata dalla curva interiore A*b*, e dall' esteriore *a*B. In oltre sia ET la costante grossezza della verga: e presi nella curva A*b* gli uguali elementi E*e*, C*c*, da' punti E, C si calino EK, C*h* perpendicolari alla direzione PBK del peso P. La parte TE*b*B della verga potrà considerarsi come una leva angolare, di cui ET sia un braccio dritto, ed EB un altro curvo: e quindi il momento di pressione, che fa il peso P nel punto E, sarà il prodotto di P in EK: ed in C un simil momento sarà il prodotto di P in C*h*. Dunque i momenti della pressione, che ne incurvano gli elementi E*e*, C*c* della verga, saranno come P.EK, e P.C*h*, cioè nella ragione di EK, e C*h*, loro distanze dalla direzione del peso.

§. 481. Princ. V. *Lo sforzo, che fa di raddrizzarsi ciascun elemento di essa verga, è nella ragion diretta della di lui rigidezza, e nell' inversa del raggio della di lui curvatura.*

§. 482. Agli estremi degli archetti minimi, ed uguali C*c*, E*e* si conducono i raggi osculatori RC, R*c*, SE, S*e*, ed a' punti C ed E si tirino le tangenti CF, EG, che incontrino in F, e G i raggi R*c*, S*e* prodotti. Sarà il trianngoletto RCF rettangolo in C, e l' archetto C*c* potrà aversi come una perpendicolare calata dal suo angolo retto sull' ipotenusa RF. Dunque (8. El. VI.) sarà R*c*:C*c*::C*c*:*c*F, e quindi

$Cc'=Rc.cF$. E dimostrando in simil guisa essere $Ee'=Se.eG$, saranno $Rc.cF$, ed $Se.eG$ uguali fra loro, come si son supposti uguali gli archetti Cc, Ee. Laonde dovrà stare $Rc:Se::eG:cF$. Per la qual cosa chiamando R ed r le rispettive rigidezze degli elementi Cc, Ee; saranno gli sforzi, che essi fanno a raddrizzarsi, come le loro natìe rigidezze (1) R ed r, e come le distorsioni cF, eG, che vi soffrono: cioè come R ad r, e come Se ad Rc. Val quanto dire tali sforzi saranno direttamente come le rigidezze degli elementi della verga, ed inversamente come i raggi delle curvature di essi.

§. 483. *Cor.* Or i momenti di pressione, che il peso P ne arreca agli elementi Cc, Ee della verga, sono le cagioni adeguate, per cui questi si distorcono, e poi si sforzano di raddrizzarsi: dunque saranno que' momenti come questi sforzi. Ma que' momenti mostraronsi proporzionali a Ch, ed EK: e questi sforzi si son dimostrati essere direttamente come le rigidezze degli archetti Cc, Ee, ed inversamente come i loro raggi osculatori Rc, Se. Dunque sarà $Ch:EK::(R:r)\,(Se:Rc)$. Cioè *il momento del peso, che produce l' incurvazione in un elemento di tal verga, o in un altro solido, che siasi piegato in simil guisa, è proporzionale alla rigidezza di esso elemento divisa pel di lui raggio osculatore.*

§. 484. Princ. VI. *Una colonna ritta, tut-*

---

(1) Quanto più è rigido l' elemento di una verga incurvata, tanto più ei cerca di raddrizzarsi: e questo sforzo è anche come il distorcimento, che ha sofferto lo stesso elemento dal sito naturale.

tochè sia rigidissima, non può mai frangersi per un gran peso, che le sovrasti, se prima non s' incurvi. E questa incurvazione non è che insensibile.

§. 485. Queste due speculazioni sono del sommo Eulero, e nel *Vol. II de' Nuovi Atti di Pietrob.* leggonsi tre di lui eleganti dissertazioni su questo argomento. Intanto giova osservare, che una colonna ritta verticalmente situata, e gravata da soverchio peso, non può mai incurvarsi, qualora sia omogenea ed uniformemente rigida; poichè in tal caso l' azione del peso ne aumenta ugualmente le forze uguali, colle quali le particelle di essa si tengono tra se congiunte. Che se poi quella colonna non abbia da per tutto la medesima densità e rigidezza, le parti men dense cederanno all' azione del peso, mentre le più rigide tuttavia si sosterranno; quindi avrà luogo l'incurvazione della colonna, e lo stato prossimo alla rottura.

PROP. LXXXIV. TEOR.

§. 486. *Se* K *ne dinoti la resistenza assoluta di un picciol prisma omogeneo, la cui base si ponga uguale ad* 1; *la resistenza assoluta di un altro prisma omogeneo della stessa materia del primo dovrà essere dinotata dal prodotto di* K *per la base di questo secondo prisma.*

Ciò è di per se chiaro.

§. 487. *Cor.* Adunque le resistenze assolute de' solidi prismatici, omogenei, ed ugualmente rigidi sono nella ragione delle basi di essi.

§. 488. *Scol.* Da quelle replicate sperienze,

che fece l'accuratissimo Muschembroek con una macchina divulsoria, rilevansi le coerenze di varii legni, e di varii metalli, di cui eccone una brieve tavola.

I. Parallelepipedi di legno, ciascuno de' quali aveva la grossezza di 0.27 di pollice Renano (1), furono strappati da' seguenti pesi di libbre Renane.

Legno di	*strappato da*	*Legno di*	*strappato da*
Teglia	lib. 1000	Picea	lib. 550
Alno	lib. 1000	Abete	lib. 600
Faggio	lib. 1250	Olmo	lib. 950
Frassino	lib. 1250	Quercia	lib. 1150

II. Fili cilindrici di metallo, ciascuno de'quali era di diametro 0,1 di poll. Renano, furono strappati da' seguenti pesi: cioè

Filo di	*strappato da*	*Filo di*	*strappato da*
Piombo	lib. 29, 25	Argento	lib. 370
Stagno	lib. 49, 25	Ferro	lib. 450
Rame	lib. 299, 25	Oro	lib. 500
Ottone	lib. 360		

III. Corde di canapa (ciascuna delle quali era ritorta da sei funicelle), avevano le seguenti circonferenze, e furono rotte da' corrispondenti pesi:

Fune della circonferenza di	*sostenne*
2 lin. renane . . .	libb. 92
0, 4 poll. renani . . .	libb. 160
0, 54 poll. renani . . .	libb. 240

(1) Il piè parigino sta al renano come 0, 3248 a 0, 3138.

Ove vuol avvertirsi; che le coerenze delle corde sono in minor ragione delle loro grossezze, e che tutti i fili diventino più deboli, quando sieno ritorti.

PROP. LXXXV. PROBL.

§. 489. *Data una trave fitta saldamente a squadra in un muro, valutarne la sua resistenza relativa.*

Sol. I. Immaginatevi essere un parallelepipedo rettangolo cotesta trave, e che sia fitta a squadra in un muro, ma in modo; che di essa due piani opposti si trovino in sito orizzontale. Di più suppongasi priva di gravità nelle sue parti, e che presa nella sua lunghezza (fig. 63.) CF la CO uguale alla sua grossezza CB, si applichi in O il peso R capace di farla piegar giù nel sito CBEF, ove le sue fibre superiori, come le AB, ec., avendo sofferta la massima distensione sieno presso a frangersi. Sarà manifesto, che la trave debba essere ritenuta in tal sito declive per la forza, che han di contrarsi le fibre AB, PD, *pd*, ec. diversamente allungate e tese: e che da queste alla ne sia preservata dal frangimento. Dunque l'aggregato de' momenti di queste forze (§. 472.) sarà la resistenza relativa di questa trave.

II. Intendasi divisa cotesta trave con un piano verticale, che sia perpendicolare alla faccia del muro, ov'ella n'è fitta a squadra; e che il rettangolo CBEF sia la sezione nata in questo solido, e la retta CA nella superficie del muro. La BA dinoti la suprema fibra della sezione CBEF, e le altre due inferiori PD, *pd* sieno vi-

cinissime tra loro. Dal punto C si elevi la CL perpendicolare a CA, giacente nel piano ACF: di poi col vertice principale C, coll' asse CL, e col parametro CA si descriva la parabola conica CNG. E finalmente, distesa per A la retta AG parallela a CL, e compito il parallelogrammo CAGL, si conducano per P, e *p* le PH, *pk* parallele alla stessa CL.

III. Ciò posto. Le forze, che han di contrarsi le fibre AB, PD (§. 477.), sono come le loro distensioni AB, PD, ed i momenti di esse forze intorno a C, ove fa leva la stessa trave (§. 306.), saranno come (AB:PD) (CB:CD), cioè come $CA^2:CP^2$, (essendo ciascuna di quelle ragioni semplici uguale alla stessa ragione di CA:CP), o finalmente, per la natura della parabola CNG, come AG a PN. Dunque la forza, onde la fibra AB ritiene la trave e la preserva dal frangimento, sta ad una consimil forza, che vi pratica l'altra fibra PD, come AG, o PH a PN.

IV. Or supposto, che una forza applicata a svellere dal muro cotesta trave, ne avesse distese le di lei fibre, quanto la BA (lo che deesi verificare quando esse strappate per dritto son presso a frangersi tutte in un colpo); ognuna di loro dee resistere al divellimento, quanto la BA, e quindi con forza proporzionale a PH. Dunque la forza, che la fibra PD oppone al suo divellimento, è alla forza, con cui resiste ad esser rotta di traverso, come PH a PN: e le divisate forze, che hanno le fibre dell' elemen[illegible] *Pp*, saranno tra se come il rettangoletto P[illegible] all' altro *Ppn*N. Dunque la massima ren[illegible]za, che fanno le fibre dell' intiera AC ad [illegible]ser di-

vulse, è alla massima renitenza nell' essere rotte di traverso dal peso R, come il rettangolo ACLG al trilineo parabolico ACG, cioè come 3:1. E dimostrando con simil ragionamento lo stesso addivenirne alle altre sezioni della trave, potrà concludersi essere come 3:1 la resistenza assoluta di essa al peso R. C. B. F.

§. 490. *Cor. I.* Dunque se la grossezza AC della proposta trave si dinoti con A, e con B la di lei larghezza; dovrà essere AB la base di una tal trave, e la resistenza assoluta di essa dovrà pareggiare KAB (§. 486.). E quindi il peso R, che applicato al punto O della lunghezza della trave fa equilibrio colla resistenza relativa di essa, dee pareggiare $\frac{KAB}{3}$.

§. 491. *Cor. II.* Il peso U, che pendendo dall' estremità F della trave fa equilibrio col peso R, dee serbare a questo la ragione di CO a CF. Il perchè dev' essere $U=\frac{R.CO}{CF}=\frac{R.A}{CF}$, e ponendo $\frac{KAB}{3}$ in luogo di R, e C in luogo di CF, si ha $U=\frac{KA^2B}{3C}$. Dunque *le resistenze relative di due travi parallelepipede rettangole ed omogenee, che sieno fitte a squadra in un muro in modo che ciascuna di esse abbia due lati della base orizzontali, sono tra se in ragion composta della duplicata delle grossezze, della semplice delle larghezze, e dell' inversa delle lunghezze.*

§. 492. *Cor. III.* E di quì si comprende;

onde avvenga, che un parallepipedo più largo, che grosso resista più ad esser rotto fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza: onde ne abbisogni più forza a romperlo per taglio, che per piatto.

§. 493. *Cor. IV.* E volendo nel Problema precedente tener conto del peso M del parallelepipedo rettangolo, che per semplicità si è omesso; dovrà supporsi un tal peso applicato nel punto medio dell' asse di quel solido, di cui n' è centro di gravità. Ma tal pesò applicato in quel punto ha lo stesso momento, che la metà di esso applicato nell' estremità della trave. Dunque affinchè si abbia l' equilibrio tra 'l peso U pendente dall' estremità della trave e 'l peso di questa colla resistenza relativa della stessa trave, dev' essere

$$U+\frac{1}{2}M=\frac{KA^2B}{3C}.$$

§. 494. *Cor. V.* Sieno M ed M' le masse di due parallelepipedi rettangoli ed omogenei, di cui A ed *a* ne siéno le rispettive grossezze, B e *b* le larghezze, e C e *c* le lunghezze. Dovrà essere la resistenza relativa del primo parallelepipedo a quella del secondo nella ragione di $\frac{KA^2B}{3C}$ a $\frac{Ka^2b}{3c}$, o sia di $\frac{A^2B}{C}$ ad $\frac{a^2b}{c}$. Il perchè se que' parallelepipedi sieno simili, sarà la resistenza relativa del primo a quella del secondo nella ragione di A^2 ad a^2. Onde se il secondo parallelepipedo sia maggiore del primo, sarà a^2 maggiore di A^2. Ma la ragione di $A^2:a^2$ è maggiore dell' altra di M:M', che pareggia quella di $A^3:a^3$. Dunque le resistenze relative de' paralle-

lepipedi rettangoli, simili, ed omogenei crescono meno di quello, che crescono le masse di essi. E perciò non è vero quel giudizio, che naturalmente entro di noi si forma, *essere le resistenze de' solidi simili proporzionali alle magnitudini loro.* Che anzi, come di quì si raccoglie, *i maggiori sono di meno consistenza de' minori*: onde non solo l' Arte, ma la Natura stessa non può crescere le sue Macchine a vastità immensa serbandovi un identico tenore di robustezza. E siccome riesce impossibile agli uomini fabbricar Navilii, Palazzi, Templi vastissimi, li cui remi, alberi, antenne, travamenti, colonne, catene di ferro, ed in somma altre loro parti consistessero; così Natura non può far alberi di smisurata mole: poichè i rami loro avendo meno resistenza, che gravezza, si fiaccherebbero. Nè può ella dare ad un uomo una compage delle ossa consistenti, ed atte alle funzioni della di lui vita, quanto il facesse crescere il triplo, il quadruplo, il quintuplo, ec. di quel che noi siamo.

PROP. LXXXVI. PROBL.

§. 495. *Ritrovare la resistenza relativa di un qualunque solido prismatico, che sia fitto a squadra in un muro.*

Sol. Sia (fig. 64.) ABCLED un qualunque prisma, cioè che le sue basi BCD, ALE sieno due qualunque rettilinei o curvilinei perpendicolarmente insistenti sul piano ABDE: ed ei s' intenda fitto saldamente nel muro PQ, ed in modo che il piano ABDE stia in sito orizzontale. Prendasi nella BD una parte infinitesima

Nn, dagli estremi della quale conducansi nel piano BCD le rette verticali NC, nc: e poi tagliate le AM, ed Mm rispettivamente uguali alle BN, ed Nn, si compia il parallelepipedo NCclLM. Sarà (§. 491.) la resistenza relativa di questo solido uguale a $\frac{K.NC^2.Nn}{3NM}$. Laonde se pongasi la lunghezza MN della trave uguale a C,BN$=x$, NC$=$X, e con ciò N$n$$=dx$; sarà la resistenza relativa del picciolo parallelepipedo NCclLM uguale a $\frac{K.X^2dx}{3C}$: e quella del solido BCLMA uguale a $\frac{K}{3C}S.\ X^2dx$. Il perchè se colle regole de'metodi sommatorii s'integri quest'ultima espressione, avrassi la resistenza relativa della parte indeterminata BCLMA del proposto solido; e si avrà la resistenza relativa dell'intiero solido BCDALE multiplicando per $\frac{K}{3C}$ l'integrale della formola X^2dx preso da $x=$o fino ad $x=$BD. C. B. F.

§. 496. *Cor. I.* Dunque se r ne dinoti quel peso, che pendendo dall' estremità della trave prismatica fa equilibrio colla resistenza relativa di questa; dev' essere $r=\frac{K}{3C}S.X^2dx$ . . . (1), ed rC$=\frac{K}{3}.S.X^2dx$ . . . (2).

§. 497. *Cor. II.* E volendosi nel Cor. prec. tener conto del peso M del solido prismatico BCDALE; dovrà supporsi un tal peso applicato

nel punto medio dell' asse di quel solido, di cui n' è il centro di gravità, e quivi agirne col momento $\frac{1}{2}$ MC. Dunque affinchè si abbia l' equilibrio tra il peso del prisma e quello, che pende dall' estremo di esso, colla resistenza relativa dello stesso prisma, convien che sia $r+\frac{1}{2}$ M uguale al prodotto di $\frac{K}{3C}$ per l' integrale di $X^2 dx$ preso da $x=o$ fino ad $x=BD$.

§. 498. *Cor. III.* Suppongasi, che la proposta trave sia un parallelepipedo rettangolo, di cui due lati della base sieno orizzontali: e si dinoti con A la di lei grossezza, con B la larghezza, e con C la lunghezza. Dovrà essere $X^2 = A^2$; e quindi la resistenza relativa di una tal trave dovrà pareggiare

$$\frac{K}{3C} S.A^2 dx,$$

preso un tale integrale da $x=o$ fino ad $x=B$: cioè dovrà pareggiare

$$\frac{K.A.^2B}{3C}.$$

Ma (§. 486.) la resistenza assoluta della stessa trave pareggia KAB. Dunque se una trave omogenea, parallelepipeda, rettangola si trovi con un estremo conficcata perpendicolarmente in un muro in modo che due lati della sua base sieno orizzontali; il peso che applicato all' estremo di essa vale a frangerla di traverso, sta a

quello, che la divelle tirandola dirittamente, come $\frac{KA^2B}{3C}$ a KAB, o sia come $\frac{A}{3}$: C; cioè come un terzo della grossezza della trave alla di lei lunghezza.

PROP. LXXXVII. PROBL.

§. 499. *Poste le medesime cose della Prop. prec., il solido prismatico* BCDALE *sia orizzontalmente situato co' suoi estremi su due immobili appoggi; determinare il massimo peso, ch' esso può sostenere nel punto medio della sua lunghezza.*

Sol. Si dinoti con T il peso, che pendendo dal punto medio V della lunghezza della proposta trave stia presso a frangerla, e si facciano le altre indicazioni del Prob. prec. Sarà chiaro, che ciascuno dei due appoggi debba sostenere la metà del peso T. Onde l'equilibrio tra 'l peso T e le pressioni da esso esercitate sù gli appoggi dovrà reggere anche qualora si rimuovano tali appoggi, ed in vece di essi vi si sostituiscano due forze, che agiscano per direzioni verticali da giù verso sù, e di cui ciascuna pareggi $\frac{1}{2}$ T. Il perchè il momento di ciascuna di queste forze a frangere quel solido nella sezione bFd dovrà pareggiare $\frac{1}{2}$ T. $\frac{1}{2}$ C. Ma questo momento pareggia il momento della resistenza della sezione bFd; cioè (§. 496. Equa. (2)) $\frac{K}{3}S.X^2dx$. Dunque dev' essere

$$\frac{1}{4}TC=\frac{K}{3}S.X^{2}dx;$$

e quindi $T=\frac{4K}{3C}S.X^{2}dx$ .... C. B. F.

§. 500. *Cor. I.* E poichè il peso r, che pendendo dall'estremità della trave prismatica BC DALE fa equilibrio colla resistenza relativa di essa trave pareggia $\frac{K}{3C}S.X^{2}dx$, e l'altro T, che pendendo dal punto medio della lunghezza della stessa trave posta orizzontalmente su due appoggi sta presso a frangerla, ne pareggia $\frac{4K}{3C}S.X^{2}dx$, dee stare $r:T::1:4$. Il perchè dev'essere $T=4r$. Dunque *un solido prismatico orizzontalmente situato su due immobili appoggi può sostenere nel suo mezzo un peso quadruplo di quello, che potrebbe reggere in un suo estremo, se fosse orizzontalmente sostenuto solo nell'altro estremo.*

§. 501. *Cor. II.* Se il solido prismatico proposto nel Probl. prec. si trovi inclinato all'orizzonte; sarà mestieri risolvere il peso T in due forze, di cui una coincida colla lunghezza di quel solido, e dalla fermezza ed immobilità degli appoggi sarà distrutta, e l'altra sia perpendicolare alla stessa lunghezza, e sarà quella, di cui converrà tener conto per valutare se il solido sia suscettibile di reggere il peso T.

§. 502. *Cor. III.* Se oltre al peso T pendente dal punto medio della trave, vogliasi tener conto del peso M di questa, di cui ciascuno degli appoggi ne sostiene la metà; l'è ma-

nifesto, che l' equilibrio debba anche aver luogo nel caso, in cui a ciascuno degli appoggi si sostituiscano due forze, una uguale ad$\frac{1}{2}$T, e l'altra ad$\frac{1}{2}$M agenti per direzioni verticali, e da giù in sù. Ma la forza $\frac{1}{2}$T dee aver per momento. $\frac{1}{2}$T.$\frac{1}{2}$C, o sia $\frac{1}{4}$TC, e la forza $\frac{1}{2}$M, potendo concepirsi applicata al punto medio della metà della lunghezza della trave, deve agire col momento $\frac{1}{2}$M. $\frac{1}{4}$C, ovvero $\frac{1}{8}$ MC. Il perchè dev' essere

$$\frac{1}{4}TC+\frac{1}{8}MC=\frac{K}{3}S.X^2dx:$$

e quindi

$$T+\frac{1}{2}M=\frac{4K}{3C}S.X^2dx.$$

C A P. XXIV.

DELLA RESISTENZA DEI SOLIDI ALLA COMPRESSIONE.

PROP. LXXXVIII. PROBL.

§. 503. *Calcolare le pressioni delle colonne ritte, che sono presso a frangersi.*

Sol. Dinoti (fig. 65.) ACB l'incurvazione di una colonna ritta, che per una gagliarda pres-

sione del peso P soprappostole sia presso a frangersi. La linea ACB differirà per poco dalla verticale BA tanto nella grandezza, che nel sito (§.484.). Laonde se pongasi $BH=x$, $CH=y$, e $BC=s$; il raggio dell' osculo nel punto C, ch' è uguale a $(-ds^3):(dxd^2y)$, diverrà $-dx^2:d^2y$: poichè la dx può prendersi per uguale a ds. Ed esprimendosi per R la rigidezza, che ha nel punto C la divisata colonna, e per Py il momento del peso P in C, come quello, ch' è proporzionale a P ed a CH; si avrà, per le cose dette nel §. 481., $(-Rd^2y):dx^2=Py$; cioè multiplicando questa equazione per $2dy:P$, ed ordinandola, sarà

$$\frac{2Rdyd^2y}{Pdx^2}+2ydy=0,$$

e ponendo f^2 in luogo di $\frac{R}{P}$, si avrà

$$\frac{2f^2dyd^2y}{dx^2}+2ydy=0,$$

ed integrando ne dovrà risultare

$$\frac{f^2dy^2}{dx^2}+y^2=g^2,$$

ove la costante g^2 ne dinota il valore, che si acquista y^2 allora che la y giunge al suo massimo, cioè allora che $\frac{dy}{dx}=0$. Dunque la g ne dinota la massima ordinata della curva ACB rapportata all' asse AB, o sia il ventre massimo della colonna.

Ciò posto. Essendo

$$\frac{f^2 dy^2}{dx^2}+y^2=g^2;$$

dovrà essere

$$dx=\frac{f dy}{\sqrt{(g^2-y^2)}},$$

ed $$x=f.\text{Arc.sen.}\frac{y}{g},$$

ove la costante, che dovrebbesi aggiungere per l'integrale completo è uguale a zero; poichè facendo $x=0$, diventa $y=0$. Ma essendo $f=\sqrt{\frac{R}{P}}$, dev' essere pure

$$x=\sqrt{\frac{R}{P}}.\ \text{Arc. sen.}\frac{y}{g},$$

e con ciò $\text{Arc.sen.}\frac{y}{g}=x\sqrt{\frac{P}{R}}$,

ed $$\frac{y}{g}=\text{sen.}\frac{x\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$$

cioè $$y=g\text{sen.}\frac{x\sqrt{P}}{\sqrt{R}} \ldots \text{ C. B. F.}$$

§. 504. *Cor. I.* Facciasi $x=AB=a$; dovrà farsi anche $y=0$. Onde l' equazione finale del precedente Problema si ridurrà all' altra

$$0=g\text{sen.}\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}.$$

Il perchè dev' essere $\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}=\text{Arc.sen.}0$; supposto,

che non sia $g=0$. Ma l'arco, il cui seno è zero, adegua la semicirconferenza di un cerchio, e quassù si è supposto il raggio del cerchio uguale ad 1. Dunque se con π si dinoti la semicirconferenza di quel cerchio, che ha per raggio l'unità, dev'essere

$$\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}=\pi, \text{ e quindi } P=\frac{R\pi^2}{a^2}.$$

Vale a dire *i massimi pesi, che possono sostenere due colonne dritte senza frangersi, debbono essere direttamente come le loro rigidezze, ed inversamente come i quadrati delle loro lunghezze.*

§. 505. *Cor. II.* Se P sia minore di $\frac{R\pi^2}{a^2}$,

dev'essere $\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$ minore di π, e sen. $\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$ non sarà uguale a zero. Il perchè per soddisfare all'equazione

$$0=g\,\text{sen.}\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$$

convien, che sia $g=0$. Dunque *se il peso, di cui venga gravata una colonna verticale, sia minore di* $\frac{R\pi^2}{a^2}$, *la colonna non potrà incurvarsi.*

§. 506. *Cor. III.* Sia P maggiore di $\frac{R\pi^2}{a^2}$,

dovrà essere $\frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$ maggiore di π, e non sarà uguale a zero il seno dell'arco $a\sqrt{\frac{P}{R}}$. Dun-

que per soddisfare all' equazione

$$o = g \operatorname{sen.} \frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$$

convien, che sia $g=o$; cioè nulla l' incurvazione della colonna. Ma la colonna s' inflette qualora P ne pareggia $\frac{R\pi^2}{a^2}$, e per l' azione di un peso maggiore si dee maggiormente incurvare. Dunque qualora il peso P soprapposto alla colonna sia maggiore di $\frac{R\pi^2}{a^2}$, l' equazione

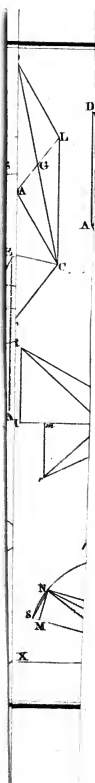
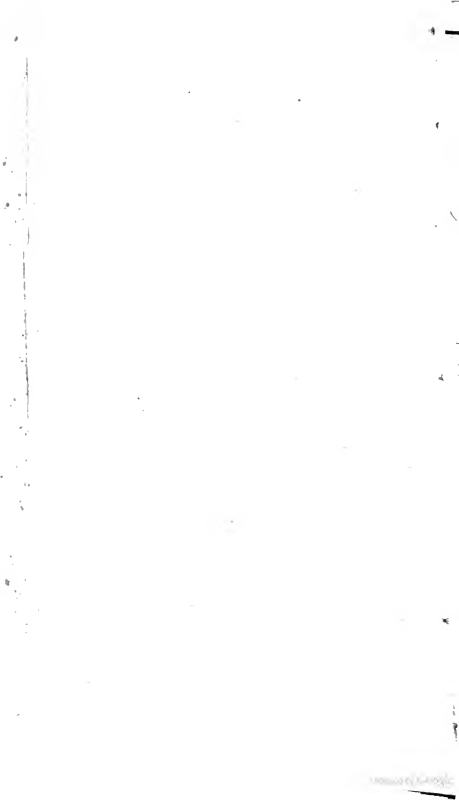
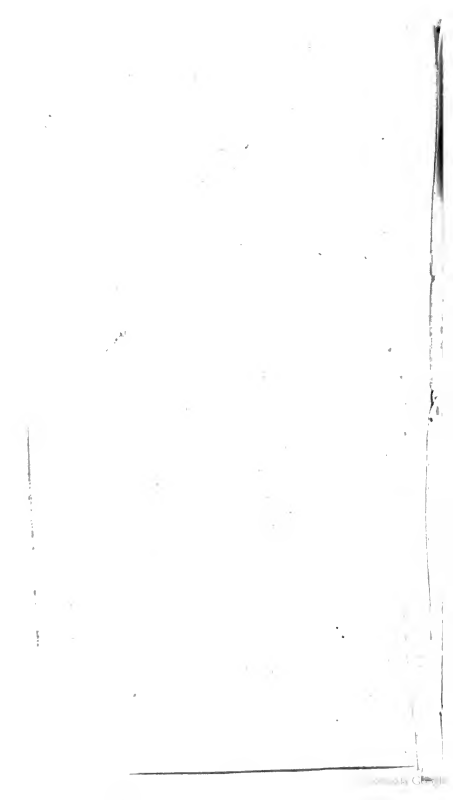
$$y = g \operatorname{sen.} \frac{x\sqrt{P}}{\sqrt{R}}$$

non è più atta a rappresentare la curvatura del di lei asse.

§. 507. *Cor. IV.* Supposto che sia $P = \frac{R\pi^2}{a^2}$, dev'essere $\operatorname{sen.} \frac{x\sqrt{P}}{\sqrt{R}} = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$, e con ciò $y = g \operatorname{sen.} \frac{\pi x}{a}$. Onde l' ascissa x, cui corrisponde la semiordinata $y=g$, dev' essere tale che $\operatorname{sen.} \frac{\pi x}{a}$ sia uguale ad 1, o sia che $\frac{\pi x}{a}$ pareggi $\frac{\pi}{2}$. Dunque l' ordinata $y=g$ corrisponde all' ascissa $x = \frac{1}{2} a$. Vale a dire che *il ventre massimo della colonna corrisponde al punto medio della di lei altezza.*

§. 508. *Cor. V.* Essendo $y = g \operatorname{sen.} x\sqrt{\frac{P}{R}}$,

l' è chiaro, che *l'incurvazione di una colonna, in parità di circostanze, è tanto maggiore, quanto più è grande quel peso, che le sovrasta.*

§. 509. *Scol.* Il sommo Eulero geometrizzando su questo nuovo ed utilissimo argomento compose tre belle dissertazioni, che trovansi registrate nel II *Vol. de' Nuovi Atti di Pietroburgo*, ove tra le altre verità insigni vi sono queste due, che ne soggiungo. I. *La forza, con cui una colonna ritta resiste ad un peso, che la gravi, è come il quadrato della sua grossezza diviso per quello della lunghezza.* II. *La massima altezza, che può avere una colonna cilindrica ritta, e rigida, affinchè dal proprio peso non venga a rompersi, è in suttriplicata ragione della di lei ampiezza.* Sicchè chiamando D e d i diametri di due colonne formate di una stessa materia rigida, saranno le divisate altezze come $\sqrt[3]{DD}$ e $\sqrt[3]{dd}$.

INSTITUZIONI

DI

IDROMECCANICA

CAP. I.

NOZIONI PRELIMINARI.

§. 1. *Def. I.* Quel corpo, di cui ciascuna particella preme ogni altra, che l' è intorno con tanta forza, con quanta delle verticali ne vien premuta, *fluido* si domanda.

§. 2. *Cor.* La pressione verticale, che recasi ad una particella di un fluido, vi genera tante altre pressioni uguali, e per tante diverse direzioni, quante sono le adjacenti particelle, che essa toccandole n' è costretta di premerle.

§. 3. *Scol.* La esistenza de' fluidi è puramente ipotetica fino a che non si rilevi, che la proprietà nella precedente definizione esposta si rinviene nell' acqua, nell' olio, nel mercurio, ec.

§. 4. *Def. II.* La scienza, che ha per soggetto il moto e l' equilibrio dei fluidi, *Idromeccanica* si domanda: ed in particolare chiamasi *Idrostatica* quella parte dell' Idromeccanica, che considera l' equilibrio dei fluidi, ed

di materia, che esso contiene in un dato volume, e come la forza acceleratrice di ciascuno: cioè come la densità di esso corpo, e come la di lui forza acceleratrice.

§. 15. *Cor. II.* Ed essendo costante la forza acceleratrice nei luoghi della nostra terra, ove n'è dato praticar l'esperienze; le gravità specifiche dei corpi, che si trovano tra noi, saranno come le densità di essi.

§. 16. *Scol.* Il volume, che si suole assumere per unità, è il piede cubico parigino.

§. 17. *Def. X. Scala della densità* di un fluido dicesi la curva (fig. 73.) QRO, di cui l'asse AF n'è verticale, e le sue ordinate BP, CR, DS, ec. sono come le densità del fluido nei corrispondenti luoghi B, C, D, ec.

§. 18. *Def. XI.* Scala delle gravità specifiche di un fluido è la curva H*a*X, di cui l'asse AF n'è verticale, e le sue ordinate B*c*, C*b*, D*a*, ec. sono proporzionali alle gravità specifiche del fluido nei luoghi B, C, D, ec.

§. 19. *Cor.* Adunque se intorno al medesimo asse AF si descrivano la scala delle forze centripete (§. 156. Mecc.) MNY, e le altre QRO, H*a*X delle densità e delle gravità specifiche; saranno le ordinate B*c*, C*b*, D*a*, ec. della scala delle gravità specifiche come (§. 14.) i rettangoli di PB in BT, di RC in CV, di SD in DZ, ec. fatti dalle corrispondenti ordinate della scala delle densità, e dell'altra delle forze centripete.

CAP. II.

DELL' EQUILIBRIO DEI LIQUIDI.

PROP. I. TEOR.

§. 20. *Se in un vase aperto* (*fig.* 66.) HBC *si contenga un liquido stagnante*; *la superficie suprema di questo farà un piano orizzontale*, *o ne starà a livello*, *come suol dirsi.*

E se tal liquido stia entro ai tubi comunicanti (*fig.* 67.) ABCD, CDEF; *le superficie supreme di esso nei tubi saranno a livello ed ugualmente alte.*

Dim. Par. I. Si prendano (fig. 66.) in uno strato orizzontale di questo liquido le due particelle p e q contigue, e s'è possibile le colonne cp, dq ad esse soprapposte non sieno tra se uguali: (il che dee accadere necessariamente, quando la superficie suprema del liquido non sia un piano orizzontale); onde una di esse, come la cp sia maggiore dell' altra dq. Sarà il peso di quella maggiore del peso di questa. Or la pressione esercitata dalla colonna di liquido cp (§.1.) sulla particella p sottopostale si trasmette intieramente nell' altra q, e la pressione fatta dalla colonna dq sulla particella q si trasmette nella particella p. Dunque sarà la pressione esercitata dalla particella p nell' altra q maggiore della forza, onde questa quella ne preme. Il perchè le due colonne di liquido cp, dq non si potranno equilibrare. Onde potendosi dimostrare, che lo stesso avvenga alle altre colonne del proposto liquido; dovrà conchiudersi, che in esso vi si debba eccitare un tumulto, un ondeggiamento, o altro moto; ch' è contro all' ipotesi del Teorema.

Par. II. Pel punto (fig. 67.) C, ove si congiungono le pareti superiori dei due tubi comunicanti ABCD, CDEF si distenda il piano orizzontale KL, e si versi in quei tubi tal quantità di liquido, che ne riempia lo spazio KLD (Par. I.). Intanto dal punto L si elevi al piano KL la perpendicolare LP, che incontri la parete CF del tubo più stretto nel punto P, e per P si distenda il piano orizzontale NO. Sarà chiaro, che se nel tubo ABCD si versi l'altra quantità GHCK di liquido, che sia capace di riempiere i due spazii NC, CO; la superficie KC dovrà soffrire una pressione, che non si sosterrà dall' altra superficie CL. Onde, da ciò che si è detto nella Par. I, il liquido non potrà reggersi in equilibrio, se non che deprimendosi dal livello GH nell' altro NP col far passare nel tubo CDEF una quantità di liquido uguale a quella, che prima ne occupava lo spazio NH, e valevole a fare sulle particelle dello strato CL una pressione uguale a quella, che il liquido NC esercita sulle particelle dello strato CK. Poichè se le colonne K*r*, LP, di liquido al di sopra del piano orizzontale KL non sono tra se uguali; le pressioni esercitate dalle stesse colonne sulle particelle K ed L nè anche saranno tra se uguali, e 'l liquido non potrà reggersi in equilibrio. Dunque le altezze del liquido nei tubi DB, DF al di sopra del piano orizzontale KL debbono essere tra se uguali, allora che tale liquido si mantiene in equilibrio. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che versando altra quantità di liquido nei due tubi comunicanti, le altezze, cui esso ascenderà negli stessi tubi allora che si pone in equilibrio, dovranno essere tra se uguali. Dunque se in un vase aperto ec. C. B. D.

§. 21. *Cor. I.* E poichè le due verità nel Teor. prec. dimostrate son dedotte dalla definizione del fluido (§. 1.) , ed esse non possono aver luogo qualora ciascuna particella di un corpo non preme ogni altra , che l' è d'intorno, con tanta forza , con quanta dalle verticali ne vien premuta ; l' è chiaro , che debba dirsi fluido ogni corpo , che versato entro ad un vase si mantiene in equilibrio , allora che la superficie suprema di esso si trova in un piano orizzontale, ovvero che versato entro a due tubi comunicanti si pone in equilibrio allora che le superficie supreme di esso nei due tubi saranno a livello ed ugualmente alte. Ma queste cose han luogo per l' acqua , per l' olio , pel mercurio , per lo spirito di vino , ec. Dunque *l' acqua* , *l' olio* , *il mercurio* , *lo spirito di vino* , *ec. sono fluidi omogenei.*

§. 22. *Cor. II.* La trasfusione della forza , onde ciascuna particella di un fluido ne vien premuta , a tutte le altre , che le stanno accanto , non può concepirsi senza supporre , che le particelle del fluido sieno dotate di un abbenchè menomo grado di elasticità. In fatti se nel vase (fig. 68.) ABCD si contenga un fluido omogeneo in equilibrio , il quale sia diviso nelle colonne verticali EFGH , KLMN , OPQR , ec. ; egli è chiaro , che se le particelle , da cui tali colonne vengono formate , fossero perfettamente dure , la pressione , che la colonna EF di fluido cagiona sulla sottoposta particella G , non potrebbe aumentare la forza colla quale la particella G ne preme l' altra M , e quella che la colonna EG ne cagiona sulla particella H a tal colonna sottoposta , non potrebbe trasmettersi alla par-

ticella N. Dunque supposto, che le particelle delle colonne fluide EFGH, KLMN, OPQR ec. sieno perfettamente dure, colla medesima forza si debbono premere le particelle F ed L, che le altre G ed M, come pure le altre H ed N, ec. Ma da quanto finora si è esposto si rileva, che le particelle F ed L si premono scambievolmente con una forza minore di quella, colla quale si premono le particelle H ed N. Dunque affinchè la pressione verticale recata ad una particella di un fluido omogeneo si possa trasmettere alle particelle laterali, convien supporre, che tali particelle sieno dotate di un certo grado di elasticità, il quale dev' essere insensibile; poichè da esatti esperimenti instituiti dai signori Kanton, Perkins, ed Oerstedt, ripetuti con maggiore accuratezza dai signori Colladon e Sturm si è rilevato, che non solo l' acqua, ma eziandio gli altri liquidi sieno compressibili; tal che una data massa di acqua per cagione della sola pressione atmosferica diminuisce per 4 in 5 centomillesimi del suo volume. Dunque le densità dei diversi strati orizzontali di un liquido debbono diminuire dall' infimo strato insino al supremo. Intanto essendo picciolissima la diminuzione di un dato volume di un liquido per cagione della sola pressione atmosferica, in molti casi potrem pure supporre, che tal liquido ritenga la stessa densità in ciascuna parte del suo volume.

§. 23. *Cor. III.* Ogni particella di un liquido stagnante preme ugualmente quelle, che le stanno d' intorno (§.1.), e da ciascuna di queste con altrettanta forza ne vien premuta. Dunque, distruggendosi queste uguali ed opposte pressio-

ni, dovrà seguirne, che *ogni parte di un fluido stagnante non graviti nel luogo, ov'essa giace, e che agevolmente ceda ad ogni forza, che le s' imprima.*

§. 24. *Cor. IV.* Se in un vase, ove contengasi un liquido stagnante, vi s'immerga un tubo dritto o ricurvo, che sia aperto nei suoi estremi; il liquido contenuto nel vase dovrà entrare nel tubo spingendovisi all' insù fino al livello di esso nel vase.

§. 25. *Cor. V.* Da quanto si è dimostrato nella Prop. prec. si rileva, che se il recipiente, nel quale si contiene un liquido, sia molto ampio, com'è il mare; la superficie suprema di esso liquido in caso di equilibrio dovrà conformarsi a quella di una sfera, che avrà per centro il centro della Terra. Poichè se tal superficie fosse piana, di quel liquido le particelle ugualmente distanti dal centro della Terra ne sarebbero premute da colonne liquide di disuguali altezze; e quindi tal liquido non potrebbe reggersi in equilibrio; il che è contro la supposizione.

PROP. II. TEOR.

§. 26. *Se dentro ai tubi comunicanti* (*fig.* 67.) ABCD, EFCD *si contengano due liquidi di densità diverse; le altezze di questi al di sopra del piano orizzontale disteso pel punto, ove si congiungono le pareti superiori di quei tubi, dovranno essere nella ragione inversa delle densità loro.*

Dim. Pel punto C, ove si congiungono le pareti superiori dei due tubi comunicanti si distenda il piano orizzontale KL, e si riempia il

volume KLD del liquido più denso. In oltre, dai punti K ed L si elevino al piano KL le perpendicolari KM, LP, che sieno nella ragione della densità del liquido KLD, di cui si riempie il tubo CFEL fino al livello PO, alla densità del liquido, di cui si riempie il tubo ABCK fino al livello GH.

E poichè sono uguali le masse di due corpi, le di cui densità seguono la ragione inversa dei volumi; sarà chiaro, che debbano essere uguali le masse dei filamenti KM, LP; e quindi eziandio le pressioni, che tali filamenti KM, LP, esercitano sulle particelle K ed L. Ma la pressione esercitata dal filamento KM sulla particella K si trasmette interamente alla particella L per mezzo delle particelle, che sono tra K ed L, e la pressione esercitata sulla particella L dal filamento LP si trasmette pure alla particella K per mezzo delle particelle, che sono tra L e K. Dunque essendo uguali queste opposte pressioni, che le particelle K ed L scambievolmente si recano per mezzo delle particelle intermedie; l'è chiaro, che se le altezze dei filamenti KM, LP, non siano nella ragione inversa delle densità dei fluidi GHCK, CLOP, le pressioni, che scambievolmente si recano le particelle K ed L per mezzo delle altre intermedie, non debbono essere tra se uguali, ed i liquidi non potranno reggersi in equilibrio nei due tubi comunicanti. Dunque affinchè due liquidi di densità diverse si mantengano in equilibrio nei due tubi comunicanti ABCDK, FCDE, l'è mestieri, che la parte ima KDL del sifone sia ripiena del liquido più denso, e che le altezze dei due liquidi nei tubi ABCK, FCLE al di sopra del piano

orizzontale KCL sieno nella ragione inversa della densità loro. C. B. D.

§. 27. *Cor.* Se due tubi comunicanti si riempiano di acqua, ed uno di essi si riscaldi oltremodo; l'acqua, che in questo si contiene, diverrà più rara, e più alta di quella, ch'è nell'altro tubo. Onde avverrà, che questo liquido si regga in equilibrio a disuguali altezze.

C A P. III.

DELLE PRESSIONI DEI LIQUIDI CONTRO LE PARETI DEI VASI, NEI QUALI SI CONTENGONO.

PROP. III. TEOR.

§. 28. *Se il vase (fig.* 66.) HBC *sia ripieno di un liquido stagnante; io dico, che ogni particella* D *delle sue pareti sia premuta da una forza normale, ch'è quanto il peso di un prisma dello stesso liquore, che abbia per base la particella* D, *e per altezza la distanza di essa dal livello del liquido.*

Dim. Fingasi il vase forato in D, e quivi fermatogli a squadra il tubolino DF aperto in D ed in F. Egli è chiaro, che il liquido rinchiuso nel vase HBC debbasi comunicare all'annesso tubolino DF, estendendosi fino al suo livello AE (§. 20. Par. II.). Onde sarà la pressione normale, che in D vi esercita il liquido del vase, uguale a quella, che vi fa per FD il liquido del tubolino. Ma il peso del liquido contenuto in DF sta alla forza, colla quale esso ne discende pel piano inclinato DF, e ne preme la particella D, come DF a DG (§. 184.

Mecc.). Dunque la pressione, che il liquido del tubolino DF esercita in D normalmente alle pareti del vase, dee pareggiare il peso del prisma di liquido, che ha per base la particella D e per altezza la DG: ed a questo stesso peso dev' essere uguale la pressione, che il fluido posto entro al vase esercita sulla particella D per una direzione perpendicolare alle pareti del vase. C. B. D.

§. 29. *Cor. I.* Ogni particella del fondo di un qualunque vase, ove stiavi un liquido stagnante, sostiene il peso di un prisma dello stesso liquido, la cui base è la particella premuta, e l' altezza la distanza di essa dal livello del liquido.

§. 30. *Cor. II.* Se un vase, che abbia il suo fondo orizzontale più stretto o più ampio della sua bocca riempiasi di un liquido; esso fondo sosterrà tanto peso, quanto di liquore può contenersi in un prisma, che abbia per base quel fondo, e per altezza la sua distanza dal livello del liquido.

§. 31. *Cor. III.* Il perchè il fondo di un vase conico ripieno di un liquido stagnante sarà premuto dal peso di quella quantità dello stesso liquido, che si conterrebbe in un cilindro della stessa base, e della medesima altezza di esso cono.

§. 32. *Cor. IV.* In oltre, supponendo orizzontalmente posti i fondi dei vasi cubici, prismatici, cilindrici, conici, o di altra figura, e riempiuti di un medesimo liquido; le pressioni, che tal liquido esercita sopra i fondi di essi, saranno tra se in ragion composta dei fondi medesimi, e delle altezze, cui il liquido ascende nei medesimi vasi.

§. 33. *Cor. V.* E poichè la pressione, che un liquido esercita sopra il fondo di un vase, nel quale esso vi ascende ad una data altezza, è tanto maggiore, per quanto maggiore è il peso del prisma di quel liquido, che ha per base lo stesso fondo, e per altezza quella del liquido dentro al vase; sarà chiaro, che le pressioni esercitate sopra i fondi di due vasi da due liquidi, che in essi vasi ascendono a diverse altezze, sono tra se in ragion composta delle ampiezze dei fondi dei vasi, delle altezze dei liquidi nei medesimi vasi, e delle densità degli stessi liquidi.

§. 34. *Cor. VI.* La somma delle pressioni, che le particelle di una sezione orizzontale del vase ricevono dal liquido posto entro ad esso, dev' essere come il perimetro di quella sezione, come la distanza di questa dal supremo strato del liquido, e come la densità dello stesso liquido. Onde se il vase sia di figura di cono troncato, che abbia la base orizzontale; le pressioni, che le sezioni orizzontali del vase ricevono dal liquido, sono tra se in ragion composta delle di loro distanze dal supremo strato del liquido, e come le circonferenze di esse sezioni; cioè in ragion composta delle di loro distanze dal supremo strato del liquido, e come i raggi di esse sezioni. Che se il vase sia di figura cilindrica; le pressioni, che le sezioni oriztali di esso ricevono dal liquido, sono come le distanze di esse sezioni dal supremo strato del liquido. Onde affinchè ciascuno di tali vasi abbia le sue parcti ugualmente resistenti, convien che le grossezze delle diverse sezioni orizzontali colle pareti del vase sieno come le distanze di esse sezioni dal supremo strato del liquido.

§. 35. *Cor VII.* Sieno R ed r i raggi delle basi di due tubi cilindrici di uno stesso metallo, G e g le grossezze delle pareti di tali tubi, ed A ed a le distanze di uno stesso liquido, di cui si trovano ripieni quei cilindri, al di sopra di due sezioni orizzontali fatte in essi. Egli è chiaro, che per formare ugualmente resistenti le circonferenze di tali sezioni, convien, che sia $G:g::(R:r)(A:a)::RA:ra$. Che se i tubi cilindrici sieno di diversi metalli; le grossezze delle pareti di essi dovranno essere in ragion composta della diretta di R ad r, della diretta di G a g, e dell' inversa della tenacità T del metallo, di cui è formato il primo tubo, alla tenacità t del metallo, di cui è formato il secondo. Or poichè dalle sperienze instituite da M. Parent si è rilevato, che un tubo cilindrico di piombo del diametro di 12 pollici, e di 6 linee di grossezza, regge al peso di una colonna di acqua di 60 piedi di altezza; per formare un altro tubo di piombo di 6 pollici di diametro, e che debba reggere ad una colonna di acqua alta 100 piedi, e sia ugualmente resistente, bisogna dare alle sue pareti la grossezza di 5 linee; poichè sta $6:5::12.60:6.100$. Ed essendo le tenacità del piombo, del rame, e del ferro, come i numeri 1, 28, e 42; l' è chiaro, che se il secondo tubo vogliasi formare di rame, converrà dare alle pareti di esso la grossezza di $\frac{5}{28}$ di linea, e per formarlo di ferro si dovrà dare alle sue pareti la grossezza di $\frac{5}{42}$ di linea.

§. 36. *Posto che due vasi di differenti capacità abbiano i fondi uguali ed orizzontali, e sieno ripieni fino ad uguali altezze di un medesimo liquido; esporre per qual ragione essendo differenti i pesi delle quantità di liquido in essi contenute sieno uguali le pressioni fatte sopra i loro fondi.*

Sol. Suppongasi, che la pressione esercitata dal liquido (fig. 66.) ABCE contenuto nel vase HBC sulla particella K ne venga dinotata dalla retta KM, ch'è perpendicolare alla parete del vase nel punto K, e distese pei punti M e K le rette MN, KN, la prima verticale, la seconda orizzontale, e che s'incontrino nel punto N, si compisca il rettangolo KNML. Egli è chiaro, che la forza KM si possa risolvere nelle due KN, KL di cui la prima orizzontalmente si esercita, e non influisce nel peso del liquido, e l'altra si esercita verticalmente. Or facendo la stessa risoluzione di forze in ciascun punto della superficie del vase, ch'è in contatto col liquido, si rileva, 1° che qualora il vase stringesi in sù; la pressione esercitata sul fondo dev'essere maggiore del peso del liquido; poichè tal peso è l'eccesso della pressione fatta sul fondo del vase sulle forze, che ne spingono in sù le pareti di questo; 2° che se le pareti del vase sieno verticali; le forze colle quali le particelle di tali pareti ne vengono perpendicolarmente premute, agiscono per direzioni orizzontali, e con ciò non evvi differenza tra la pressione esercitata sul fondo e 'l peso del liquido; 3° e che se il vase abbia la bocca più ampia

del fondo; il peso del liquido sarà quanto la somma della pressione esercitata sul fondo e delle forze, che ne spingono da sù verso giù le pareti di esso, come vedesi nella fig. 69. C. B. F.

PROP. V. TEOR.

§. 37. *La pressione, che da un liquido stagnante contenuto entro ad un vase recasi perpendicolarmente alla superficie dello stesso vase, pareggia l'intiera superficie, che trovasi in contatto col liquido, multiplicata per la distanza del centro di gravità di essa dal supremo strato del liquido, e per la densità dello stesso liquido.*

Dim. Sia uguale a D la densità del liquido, che ne riempia un vase fino ad una certa altezza, e si dinoti con x la distanza di una particella p della superficie del vase, che trovasi in contatto col liquido; dallo strato supremo dello stesso liquido. Dovrà essere la pressione normale, che il liquido esercita sulla stessa particella uguale a Dpx (§. 28.), e la somma di tutte le pressioni normali, che il fluido esercita sulla superficie del vase, uguale a $\Sigma.Dpx$, ovvero a $D.\Sigma.px$. Ma $\Sigma.px$ è la somma de' momenti delle particelle della superficie del vase, che trovasi in contatto col liquido, rispetto allo strato supremo dello stesso liquido, e tal somma di momenti pareggia l'intiera superficie del vase, ch' è in contatto col liquido, multiplicata per la distanza del centro di gravità di essa dal supremo strato del liquido (§. 437. Mecc.). Dunque dev' essere $D.\Sigma.px$.

uguale alla densità del liquido multiplicata per la superficie del vase, che trovasi in contatto col liquido, e per la distanza del centro di gravità di questa dal supremo strato del liquido. C. B. D.

§. 38. *Cor.* E poichè il centro di gravità di un rettangolo dista da un lato di esso per la metà della lunghezza di uno dei lati adjacenti al primo; l' è chiaro, che se la base di un prisma retto, ripieno di un liquido stagnante, si trovi in sito orizzontale, ciascuno dei rettangoli laterali di un tal prisma dee soffrire una pressione metà di quella, che soffrirebbe se tal rettangolo fosse la base orizzontale di un altro prisma retto della stessa altezza del primo, e riempiuto dello stesso liquido, di cui trovasi riempiuto il primo.

PROP. VI. TEOR.

§. 39. *Le pareti del tubolino (fig. 69.)* baef, *annesso al vase* XVZY *pieno di acqua stagnante insino ad* XY, *ricevono dalla pressione dell' acqua quella distensione, che esse ne avrebbero, se dispiegate nella forma rettangolare* BAEF *si facciano stirar per dritto da un peso uguale a quello di un prisma di acqua, il quale abbia per base il rettangolo generatore del tubolino, e per altezza la distanza di esso tubolino dal livello dell' acqua.*

Dim. Il rettangolo BAEF, in che si è dispiegato il tubolino *baef*, intendasi sospeso verticalmente, e gravato in mezzo alla sua base da un peso p, capace di produrvi la disten-

sione BNMF uguale all' altra *vnmr*, che dalla pressione dell' acqua si arreca al tubolino *baef*, e si chiami P questa pressione. Sarà chiaro, che debba essere il momento del peso *p* uguale a quello della forza premente P: e quindi sarà il prodotto del peso *p* nello spazietto AN, che esso ha dovuto descrivere in producendo tale allungamento nella lamina rettangolare, uguale al prodotto della forza P, premente le pareti del tubolino, nello spazietto *an*, che essa ne descrive in dilatandole. Laonde per l' equalità di tali prodotti dovrà stare $P:p::AN:an$.

E poichè le superficie cilindriche *vnmr*, *baef*, si son supposte rispettivamente uguali ai rettangoli BNMF, BAEF; sarà la differenza di quelle uguale alla differenza di queste: cioè $vnmr - baef = BNMF - BAEF$, e sarà pure la differenza delle periferie *nsm*, *ate* delle basi di quelle superficie cilindriche uguale alla differenza delle altezze BN, BA di questi rettangoli, cioè ad AN. Ma le periferie *nsm*, *ate* sono come i loro raggi *cn*, *ca*. Dunque per la 19. El. V. dovrà essere $nsm - ate$, cioè AN ad *an*, come la periferia *nsm* al suo raggio *cn*, cioè come $\pi:\rho$ (dinotando per questi simboli il rapporto costante della circonferenza al raggio). Dunque se nella proporzione $P:p::AN:an$ alla ragione di $AN:an$ vi si sostituisca quella di $\pi:\rho$, si avrà $P:p::\pi:\rho$. Ma sta $\pi:\rho$ come la superficie cilindrica *baef* al rettangolo generatore del tubolino *baef*, o come il peso del prisma di acqua, che ha per base la superficie cilindrica *baef* e per altezza *b*Y, al peso del prisma di acqua, che ha per base il rettangolo generatore del tubolino e per altezza *b*Y. Dunque sarà

pure P:p come il peso del primo di detti prismi a quello del secondo. Ma P è uguale al peso (§. 37.) del primo de' mentovati prismi. Dunque sarà il peso p uguale a quello di un prisma d'acqua, la base del quale è quanto il rettangolo generatore del tubolino, e l'altezza quanto la distanza del tubolino dal livello dell' acqua. E quindi sarà vero (1) quello, che si è proposto. C. B. D.

§. 40. *Cor. I.* Di quì può calcolarsi la fermezza di un dato tubolino annesso al fondo di un gran vase pieno di acqua: e può anche antivedersi se abbiavi a succedere frattura nelle pareti di quello.

§. 41. *Cor. II.* Dalla dimostrazione di questo Teorema si potrebbe una verità della statica derivare: ed è che *la resistenza di una catena di ferro curvata in cerchio sta alla resistenza, che ella ne oppone strappata per dritto, come la periferia di un cerchio al raggio.*

§. 42. *Scol.* Da questi principii è agevole calcolare le resistenze, che le catene di ferro oppongono alle spinte di una cupola ruinante, che esse ne accerchiano. In fatti, per mostrarvelo con un esempio, la più alta di quelle due catene di ferro, che cingono la cupola di S. Pietro in Roma, è di pollici renani 2, 5 di diametro. Dunque la sua resistenza assoluta, o la renitenza ad essere strappata per dritto dovrà

---

(1) **In questa Proposizione si è tacitamente supposto, che il diametro del tubolino sia picciolissimo rispetto alla di lui distanza dal livello dell' acqua; affinchè tutt' i punti della di lui superficie si possano considerare come ugualmente distanti dallo stesso livello.**

montare ad 1767146 libbre renane. Imperciocchè si sà per esperienza, che un filo di ferro del diametro 0, 1 di pollice renano arriva a sostenere 450 libbre d'Olanda. Onde supposto che le resistenze dei fili crescano in duplicata ragione dei loro diametri; dovrà stare 0, 01 : 6, 25::450 lib. al quarto 281250 lib. Per la qual cosa dovendo essere questa resistenza a quella, che si ha dalla stessa catena curvata in cerchio, come il raggio alla circonferenza, troverassi la resistenza di questa catena essere di 1767146 libb. renane. Sul qual proposito conviene avvertire, che secondo le sperienze del Chiaris. Musschenbroek le resistenze dei fili di ferro crescono in minor ragione dei quadrati dei diametri di essi fili; tal che essendo i quadrati quei diametri come i numeri naturali 1, 2, 3, ec., i pesi, che bisognano per spezzare quei fili, debbono essere come i numeri 130, 230, 310, ec., ove vedesi, che 230 sta a 130 in minor ragione di 2 ad 1, ec.

C A P. IV.

DEI SOLIDI, CHE IMMERGONSI NEI LIQUIDI.

PROP. VII. TEOR.

§. 43. *Un solido, che immergesi in un liquido stagnante, vien sospinto verticalmente dal liquido con una forza, ch'è quanto è il peso di un volume del liquido uguale al volume del solido stesso.*

Dim. Si concepisca, che del liquido stagnante (fig. 69.) ABCE ne sia separata per mezzo

di una superficie matematica la porzione FG. Egli è chiaro, che non avendo il volume FG alcun movimento nella massa liquida, debbano essere uguali le opposte pressioni, che da questa massa nel volume FG orizzontalmente si esercitano. Ma queste pressioni non cangiano di energie o che si accresca o che si diminuisca la densità del corpo FG. Dunque qualunque sia la figura e la densità di un corpo, che immergasi in un liquido, le pressioni, che tal liquido esercita orizzontalmente sulla superficie del corpo debbono scambievolmente distruggersi tra loro. Or poichè il volume liquido FG non gravita nel luogo, ove si giace (§. 23.); l'è chiaro, che un solido della stessa densità e dello stesso volume di FG dovrà nel liquido ABCE perdere l'intiero suo peso. Dunque un solido FG della stessa densità del liquido ABCE viene spinto da questo verticalmente da giù verso sù con una forza, ch'è quanto il peso dello stesso solido. Il perchè se aumentasi la densità del solido FG, questo dovrà discendere con una forza, ch'è quanto l'eccesso del suo peso sul peso di un egual volume di quel liquido. Che se il solido FG sia di minor densità del liquido; un tal solido dovrà esserne spinto verso lo strato supremo del liquido con una forza, ch'è quanto l'eccesso del peso di un volume di liquido uguale al volume del solido sul peso del solido stesso. Dunque un solido, che immergesi in un liquido ec. C. B. D.

§. 44. *Cor. I.* Dalla dimostrazione del Teorema precedente si rileva quali sieno quei corpi solidi, che immersi nell'acqua o in altro liquido vi si sommergano intieramente, e quali

quegli altri, che vi galleggiano, sicchè spinti per forza verso del fondo ritornino a galla, reggendosi con una parte del loro volume eminente sul livello del liquido, e coll' altra quivi demersa.

§. 45. *Cor. II. Di più un solido specificamente più grave di quel liquido, ov' è immerso, dee perdervi tanto peso, quanto ne avrebbe il liquido contenuto entro al suo volume.*

§. 46. *Cor. III.* E l' intiero peso di tal solido sta a quella parte di peso, che esso vi perde nel liquido, come la gravità specifica del solido a quella del liquido.

§. 47. *Cor. IV. E se lo stesso solido si va successivamente mergendo in diversi liquidi, di ciascun dei quali sia in ispecie più grave; le parti del suo peso, che vi perde, saranno come le gravità specifiche dei liquidi.*

§. 48. *Cor. V. Un solido, ch' è in ispecie men grave del liquido, ove s' immerga, non può ridursi alla quiete se non vi galleggi e soprannuoti in modo, che l' intiero suo peso adegui quello del liquido contenuto sotto la parte demersagli.*

§. 49. *Cor. VI.* Il perchè l' intiero peso del solido, che si va successivamente mergendo in più liquidi, di ciascun dei quali sia in ispecie men grave, dee pareggiare il peso di ciascuno di essi contenuto nel volume della parte demersagli. *E le parti, che esso solido tien demerse in tali liquidi, saranno inversamente come le gravità specifiche di questi.*

§. 50. *Cor. VII.* Ogni corpo specificamente più grave dell' acqua può rendersi un di lei galleggiante, sol che si faccia un vuoto dentro di es-

so, sicchè l'acqua contenuta nel suo intero volume abbia maggior peso di questo solido scavato. Il perchè sebbene l'oro sia uno dei più ponderosi corpi dei tre regni della natura, pur non di meno può formarsi un vase di oro, che molto soprannuoti non solo all'acqua, ma eziandio all'olio, ed allo spirito di vino, che dell'acqua sono più leggieri.

§. 51. *Scol. I.* Se nel sifone (fig. 67.), ABCFED ricurvo nella parte inferiore, ed aperto in AB ed FE, vi sieno l'acqua GHCK e il mercurio KDOPC ridotti all'equilibrio (§. 26.), versando a stille altra quantità di acqua nel tubo ABCD; per potervi reggere l'equilibrio tra i due liquidi, converrà, che una porzione del mercurio contenuto nello spazio KDL introducasi nel tubo CFEL, e con ciò la superficie KC si dovrà deprimere. Il perchè una quantità di acqua si troverà come immersa entro al mercurio, essendone da essa premuta. Dunque essendo l'acqua di una gravità specifica minore di quella del mercurio, essa dovrà farsi strada a traverso di questo secondo liquido, e vi dovrà montare a galla in tal quantità, che i piani KC, LC ne sieno ugualmente premuti.

§. 52. *Scol. II.* Nei precedenti Corollarii ascondonsi quei principii, onde gli Artefici sogliono costruire varie macchinette idrostatiche, adattate a valutare le gravità specifiche dei solidi, e dei liquidi, le quali vengono descritte nelle ordinarie Instituzioni di Fisica Sperimentale, ove suol rapportarsi una tavola delle gravità specifiche di molti corpi.

§. 53. *Def. XII. Il centro della figura* di un corpo è quel punto, nel quale si trovereb-

be il centro di gravità del corpo, se la massa di questo ne fosse uniformemente distribuita pel suo volume.

§. 54. *Cor.* Adunque il centro di gravità di un corpo e quello della figura di esso debbono coincidere, se il corpo in ciascuna parte del suo volume ritiene una medesima densità.

PROP. VIII. TEOR.

§. 55. *Un solido specificamente più grave di quel liquido, ove s' immerge, nel discendere entro di questo dovrà andarne per dritto senza rotolare o barcollare, se il suo centro di gravità cada su quello della sua figura, o giacciano questi punti in una stessa retta verticale.*

Ed un solido specificamente men grave di quel liquido, ove si demerga, nel montare a livello del liquido dovrà andarne per dritto senza rotolare o barcollare, se il suo centro di gravità cada su quello della sua figura, o giacciono questi punti in una stessa retta verticale.

Dim. Par. I. Concepiscasi, che (fig. 69.) Q rappresenti il centro di gravità del corpo FG specificamente più grave del liquido ABCE, nel quale s' immerga, e che P ne dinoti il centro della figura dello stesso corpo. Egli è chiaro, che se il corpo si lasciasse discendere nel vuoto, esso vi discenderebbe coll' intiero suo peso, il quale si potrà dinotare colla retta verticale QT applicata al centro di gravità Q di esso. Ma trovandosi il corpo FG nel liquido ABCE, esso n' è sospinto verticalmente con una forza (§.43.),

ch' è quanto il peso di un volume del liquido stesso uguale al volume FG del corpo, e che per esserne il liquido di uniforme densità dee trovarsi applicata nel centro P della figura del corpo stesso (§. 96. Mecc.) per la direzione verticale PS. Dunque agli estremi Q e P della retta QP sono applicate due forze parallele, che agiscono per opposte direzioni. Il perchè la risultante di queste forze dovrà trovarsi applicata in un punto del prolungamento della QP verso quella parte, ove corrisponde la maggiore QP delle due forze QT, PS (§. 95. Mecc.). E quindi nel caso che la QP non sia verticale, e la gravità specifica del corpo sia maggiore di quella del liquido ABCE, il punto, nel quale trovasi applicata la risultante delle due forze parallele QT, PS, dee discendere dentro del fluido nella parte più bassa.

Par. II. Che se la gravità specifica del liquido ABCE sia maggiore di quella del solido FG, dovrà essere PS maggiore di QT, e la risultante di queste due forze parallele dovrà trovarsi applicata nel prolungamento della QP verso quella parte, ove corrisponde la maggiore PS di dette forze. E perciò se la PQ non sia verticale, e la gravità specifica del liquido AB CE sia maggiore di quella del solido FG, il punto, nel quale trovasi applicata la risultante delle due forze parallele QT, PS, dee montare nella parte più alta. Dunque ec. C. B. D.

§. 56. *Cor. I.* Il perchè ogni corpo, che si può intendere generato da una figura piana rivolta intorno al suo asse, se abbia la materia uniformemente pel suo volume ripartita dovrà coll' asse verticale galleggiare in un liquido di esso corpo più grave.

§. 57. *Cor. II.* Un solido, che galleggi in un liquido, dee prendere tal sito, che l'intiero suo peso sia quanto quello della quantità di liquido contenuto nella parte del volume del solido, ch'è demersa nel liquido stesso, e che la retta congiungente il centro di gravità del solido col centro della parte del volume di esso demersa nel liquido sia verticale.

CAP. V.

DELL' ARIA ATMOSFERICA CONSIDERATA COME FLUIDO ELASTICO.

§. 58. *Def. XIII.* Quella sostanza trasparentissima, che non solo cinge la nostra Terra, ma penetra e discende negli antri profondi, e nei più celati recessi del seno della Terra stessa, chiamasi *aria atmosferica*, qualora si consideri nella sua purità, ed intieramente scevra da qualunque altra sostanza. E dicesi *atmosfera terrestre*, o semplicemente *atmosfera* l'intiero complesso dell'aria e di tutto ciò, che dai corpi esistenti sulla Terra continuamente vi si solleva, e si mescola coll'aria medesima.

PROP. IX. TEOR.

§. 59. *L'aria atmosferica è un fluido elastico.*

Dim. Nel vase (fig. 71.) ABCD ripieno di acqua insino al livello EF vi s'immerga l'estremità di un tubo ricurvo KLM aperto da ambe le parti, e di cui il punto più elevato L non molto disti dal livello EF del liquido. Di poi all'orifizio M del tubo KLM vi si applichi la

bocca, e succhiando s'inspiri quell'aria di che esso tubo trovasi riempiuto. Si vedrà tosto il liquido contenuto nel vase ABCD ascendere entro al tubo insino al punto L, e di poi discendere per l'altro ramo LM. Or se l'orifizio si trovi nel piano EF, togliendo la bocca da esso l'acqua si manterrà nel ramo LM senza montar sù o discendere giù. Dunque l'acqua contenuta nel vase ABCD deve ascendere nel ramo KL del tubo KLM in virtù di una pressione esercitata sulla superficie di essa, ch'è fuori dello stesso tubo, la quale è maggiore di quella, che si esercita sulla superficie dell'acqua posta dentro al tubo: ed oltre a ciò affinchè l'acqua possa mantenersi nel ramo LM senza ascendere nè discendere allora che l'orifizio M si trova nel piano EF, convien supporre, che tanta sia la pressione esercitata contro di essa verso M, quanto quella, che si esercita sulla superficie EF posta fuori del tubo KL; poichè le colonne di acqua di uguali altezza, che sono nel tubo KLM dall'una e dall'altra parte del punto più elevato L, si debbono equilibrare (§. 20.). Ma sulla superficie EF posta fuori del tubo ML vi poggia l'aria, e succhiando per l'orifizio M si è tolta tutta o una porzione di aria, che si contenca nel tubo KLM. Dunque dall'ascendere, che fa l'acqua dentro al tubo KL si rileva, che l'aria esercita sulla superficie EF una pressione da sù in giù, e dal restare impedito il movimento dell'acqua allora che si toglie la bocca dall'orifizio M posto nel piano EF si rileva, che le colonne GH, MN si fanno equilibrio, e con ciò debbono essere ugualmente alte. Si concepisca ora, che in qualsivo-

glia luogo delle pareti del tubo KLM al di sopra del piano EF vi sia un foro alquanto grande, che nel precedente sperimento si sia mantenuto ben coperto con un pezzo di pelle di vescica, e mentre l'acqua riempie l'intiero tubo KLM si faccia a quel pezzo di vescica un foro con uno spillone; si vedrà tosto, che l'aria intromettendosi entro al tubo ne farà discendere nel vase quella quantità di acqua, che trovavasi tra 'l foro ed il liquido EFCD. Dunque l'aria esercita la sua pressione per tutte le direzioni. Ma ponendo in una vescica una quantità di aria, questa può ridursi in un volume maggiore o minore, secondo che venga premuta da una forza minore o maggiore di quella, colla quale la vescica abbandonata a se stessa ne sarebbe premuta dall' aria circostante. Dunque l'aria atmosferica è un fluido elastico, e con ciò eterogeneo (§. 6.). C. B. D.

§. 60. *Esperienza I. L'altezza media del barometro al livello del mare l'è di 28 pollici e 2 linee francesi, cioè di 338 linee.*

§. 61. *Cor.* Dunque la pressione media, che sopra una data superficie posta al livello del mare vi fa una colonna di aria, dee pareggiare il peso di un prisma di mercurio, che ha per base la medesima superficie, e per altezza una retta di 338 linee francesi. Ma l'altezza di un tal prisma di mercurio sta a quella di un prisma di acqua della medesima base e dello stesso peso, come la densità dell' acqua a quella del mercurio, o come la gravità specifica dell' acqua a quella del mercurio; cioè come 1 : 13, 568. Dunque quel prisma di acqua, che ha per base la detta superficie e per altezza il pro-

dotto di 338 linee per 13, 568, cioè 31$^{pie.}$, 8, dee pareggiare la pressione media atmosferica al livello del mare.

§. 62. *Esp. II. Il peso di un piede cubico di quell' aria, che trovasi al livello del mare pareggia un' oncia e 230 grani.*

§. 63. *Cor. I.* E poichè un piede cubico di acqua distillata pesa circa 70 libbre e 2 once parigine, che equivalgono a 1122 once, essendo ciascuna libbra parigina di 16 once; dovrà stare la gravità specifica dell' acqua a quella dell' aria nella ragione di 1122 once ad 1 oncia e 230 grani, o come 1122 ad $1\frac{230}{600}$. Ma questa ragione è a un di presso uguale a quella di 811 ad 1. Dunque la gravità specifica dell' acqua sta alla gravità specifica dell' aria, o sia la densità dell' acqua sta alla densità dell' aria nella ragione di 811 ad 1.

§. 64. *Cor. II.* Essendo di 31$^{pie.}$, 8 l' altezza della colonna di acqua, che al livello del mare si equilibra coll' aria atmosferica, se facciasi 1 ad 811 come 31,$^{pie.}$ 8 a 25789$^{pie.}$, 8; sarà 25789$^{pie.}$, 8 l' altezza equivalente di un fluido omogeneo denso quant' è l' aria, che trovasi al lido del mare.

§. 65. *Cor. III.* In oltre, poichè il peso di un prisma di acqua, che ha per base il quadrato di un piede, e per altezza una retta di 31$^{pie.}$, 8, pareggia la pressione, che sulla superficie di un piede quadrato fa la colonna di aria, che ha per base la stessa superficie e per altezza l' intiera altezza dell' atmosfera; l' è chiaro, che tal pressione debba pareggiare il prodotto di 31$^{pie.}$, 8 per 1122 once, cioè 2230 libbre parigine.

§. 66. *Esp. III. La densità dell' aria è quasi proporzionale alla forza comprimente, qualora il volume, che essa vien costretta ad occupare in virtù di tal forza non è assai minore di quello, che essa occupa nel suo stato naturale. E se la forza, che ne comprima un dato volume di aria, il riduca ad un volume assai minore di quello, che essa naturalmente occupa, vi bisognerà una forza maggiore di quella per restringere un tal volume alla metà dell' altro, in che fu ridotto dalla prima forza.*

Questa verità si può confermare con varie sperienze, le quali sono state istituite dal Boile, dal Mariotte, dall' Amontons, dal Marchese Poleni, dai Bernoulli, da Arago e Dulong, i quali con un apparecchio diverso da quello del Mariotte han rilevato, che almeno tra i limiti della pressione atmosferica ed un' altra ventisette volte maggiore, la densità dell' aria cresce come la forza, che la comprime; laddove il Chiaris. Oerstedt unitamente al Capitano Suenson han rilevato dalle sperienze, che la densità dell' aria segue la detta legge tra i limiti di una pressione atmosferica ed un' altra otto volte maggiore. Intanto ecco la sperienza del Mariotte.

Prendasi un cannello di vetro ricurvo (fig. 72.) ABC chiuso in C ed aperto in A; vi si versi un pò di mercurio fino all' altezza orizzontale DE, affinchè l' aria rinchiusa CE non sia nè meno nè più dilatata di quella, ch' è nell' altro braccio: poichè se il mercurio fosse un poco più alto in un braccio, che nell' altro, l' aria sarebbe in questo più premuta. Bisogna che l' al-

tezza EC sia mediocre, per esempio di 12 pollici, e l'altra AD sia alta quanto si può averla. Essendo dunque il mercurio dall' una e dall'altra parte alla stessa altezza verso D ed E, e non essendovi più comunicazione tra l' aria EG e DA, si versi altro mercurio dall' apertura A con un piccolo imbuto di vetro, procurando, che non entri aria nello spazio CE. Si vedrà l'aria salire a poco a poco verso C e condensarsi, e se EF è di 6 pollici, essendo FG una linea orizzontale, il mercurio sarà salito nell' altro braccio fino al punto H lontano 28 pollici dal punto G, se sieno allora i barometri all' altezza di 28 pollici nel luogo dell'osservazione; perchè se fossero a 27 pollici e mezzo anco GH sarebbe solamente a 27 pollici e mezzo. In questo stato adunque l' aria in FC è premuta dal peso dell' atmosfera, che si suppone uguale a quello di 28 pollici di mercurio, e dal peso ancora di 28 pollici di mercurio, che sono nello spazio GH. Si vede adunque, che l' aria EC si sarà condensata in proporzione del peso. Nello stesso modo si rileva che essendo l' aria in FC premuta dal triplo del peso dell' atmosfera, essa si ridurrà ad un volume, che sarà terza parte di quello, che occupava allora che n' era premuta dal semplice peso dell' atmosfera. E così procedendo innanzi.

PROP. X. TEOR.

§. 67. *L' elasticità di un dato volume di aria dirigesi per ogni verso, ed è proporzionale alla forza, che la comprime, ed a quel grado di calore, che essa contiene.*

Dim. Il conato espansivo, che destasi in una

massa di aria in virtù della forza, che la comprime, è proporzionale all'energia di essa forza. Ma il calore di cotesta aria cercando di dilatarla a misura di quel grado, che esso vi tiene, ne genera un simigliante conato. Dunque da questo duplice principio dee nascere in tale aria un' elasticità proporzionale alla forza, che la comprime, ed al calore, onde tale aria n'è penetrata. C. B. D.

§. 68. *Cor. I.* Dunque l'elasticità di due uguali masse di aria, e da un medesimo calore penetrate, saranno come le rispettive forze, che le comprimono.

§. 69. *Cor. II.* E se le forze comprimenti queste due arie sieno uguali; l'elasticità di queste saranno come i gradi di calore, che contengono, supposto che il calore non abbia ingrandito il volume di ciascheduna.

§. 70. *Esp. IV. L'aria pura e secca aumenta di* $\frac{1}{268}$ *il suo volume per ogni grado del termometro centigrado di aumento di temperatura.*

§. 71. *Scol.* I vapori, che si trovano abbondantemente nell'atmosfera, per ogni aumento di 1° del termometro centigrado nella temperatura aumentano il loro volume per più di $\frac{1}{268}$, e tal aumento non è uniforme come per l'aria, ma è maggiore a misura ch'è maggiore la temperatura del vapore. Dunque secondo che nell'aria atmosferica si contenga maggiore o minore quantità di vapori acquosi, maggiore o minore è l'aumento di volume, che essa acquista, supe-

riore ad $\frac{1}{268}$, per un aumento di temperatura di 1° del termometro centigrado.

PROP. XI. TEOR.

§. 72. *Se una massa di aria premuta dal peso* P *acquisti il volume* V , *e la stessa massa caricata dal peso* p *restringasi nel volume* v ; *sarà* PV=pv.

Dim. Imperocchè i pesi P e *p* sono proporzionali alle densità , che essi rispettivamente producono in quella data massa di aria (§. 66.). Ma queste densità sono inversamente come i volumi, che essa acquista (§. 12. Mecc.). Dunque sarà P:*p*::*v*:V , e quindi PV=*pv*. C. B. D.

CAP. VI.

DELL' EQUILIBRIO DELL' ARIA COL MERCURIO.

PROP. XII. PROBL.

§. 73. *Data la legge, onde variano le densità e le forze acceleratrici di un fluido, che cingendo la sfera* Fβδ *ne graviti al di lei centro ; ritrovare la legge delle pressioni di esso fluido.*

Sol. Un raggio (fig. 73.) qualunque GF di questa sfera protraggasi all' insù, finchè ne arrivi al supremo strato QAM di esso fluido. Di poi intorno a questa retta GA come asse intendansi descritte in uno stesso piano le tre curve QRO , MNY , H*a*X , le prime delle quali sie-

no le rispettive scale delle densità di esso fluido, e delle forze acceleratrici dei corrispondenti (§. 156. Mecc.) di lui strati, e la terza sia quella delle loro gravità specifiche. Dico essere la pressione, che fa questo fluido su di un piano posto in D nel sito D*f* a quella, che ei farebbe su tal piano posto in simil guisa nel luogo F, come l'aja AD*a*H all'altra AFXH.

Dim. Dal punto A si concepisca eretto verticalmente lo spazio cilindrico AEIF, che abbia per altezza la retta AF, e per base il cerchio di FI. E quest'altezza sia divisa nelle particelle infinitesime ed uguali AB, BC, ec., e pei loro estremi vi sieno condotti gli strati di fluido BQ, CP, DR, ec. perpendicolari a GA, i quali segnino nelle riferite curve le ordinate PBT, RCV, SDZ, ec. Sarà manifesto potersi considerare come omogenei i fluidi rinchiusi nei cilindretti BE, C*d*, D*e*, ec., ed aventi le densità BP, CR, DS, ec. Dunque i rispettivi pesi di questi fluidi dovranno essere come le masse contenute nei cilindretti BE, C*d*, D*e*, ec., e come le forze, che quivi le accelerano: cioè (per essere uguali cotesti cilindretti) come le densità dei fluidi, che riempieno questi solidi, e come le divisate forze acceleratrici. Vale a dire saranno quei pesi come le corrispondenti ordinate B*c*, C*b*, D*a*, ec. nella scala H*a*X delle gravità specifiche del dato fluido, o come i rettangoletti ugualmente alti AB*c*H, BC*bc*, CD*ab*, ec. Dunque la somma dei pesi dei cilindretti del fluido, che soprastando al cerchio di D*f* lo gravano all'ingiù verso del centro della sfera, sta alla somma di questi altri cilindretti del fluido, che in simil modo ne premerebbero l'ugual

cerchio di FI, come la somma dei rettangoletti iscritti nell' aja AD*a*H agl' iscritti nell' aja AFXH, cioè come l'aja AD*a*H all' altra AFXH. C. B. D.

§. 74. *Cor. I.* Se gli strati di questo fluido suppongansi animati da una stessa forza acceleratrice, lo che dee verificarsi quando FA sia infinitesima rispetto a GF; la scala delle gravità specifiche di questo fluido confonderassi colla scala QRO delle densità di esso (§. 19.). E quindi *le pressioni, che farà questo fluido in* D *ed* F, *saranno proporzionali alle aje* ADSQ, AFOQ *nella scala della densità di esso.*

§. 75. *Cor. II.* E quindi la differenza delle pressioni, che fa questo fluido nei luoghi C e D infinitamente tra loro vicini, sarà proporzionale alla differenza delle aje ACRQ, ADSQ, cioè all' aja CDSR.

§. 76. *Cor. III.* Dunque *l' equilibrio di questo fluido esige, che la differenza delle pressioni sofferte da due strati vicinissimi di essi sia proporzionale alla distanza loro, ed alla densità, che quivi ne tiene il fluido.*

PROP. XIII. TEOR.

§. 77. *Nell' ipotesi della gravità costante (§.75.), se le densità dei diversi strati di aria paralleli all' orizzonte sieno proporzionali alle forze comprimenti; i logaritmi delle altezze barometriche in due luoghi posti a diverse distanze dalla superficie terrestre sono nella ragione delle distanze di essi luoghi dal supremo strato dell' atmosfera.*

Dim. Un raggio qualunque GF della Terra

si prolunghi sino ad incontrarne l' ultimo strato MAQ dell' atmosfera nel punto A, e nella retta FA si prendano le particelle hg, gK picciolissime, di uguali lunghezze, e contigue.

Essendo uguali i volumi dei filamenti di aria hg, gK, saranno le masse di essi proporzionali alle densità. Ma per ipotesi le densità sono proporzionali alle forze comprimenti. Dunque dee stare la massa del filamento hg a quella del filamento gK come l' intiero peso del filamento hA a quello del filamento gA, ovvero, per esserne costante la forza acceleratrice, il peso del filamento hg a quello del filamento gK come il peso del filamento hA a quello del filamento gA. Il perchè se con P si dinoti il peso del filamento hA, con p quello di hg, e con p' il peso di gK; dovrà stare $P:P+p::p:p'$, e la somma degli antecedenti alla somma dei conseguenti come un solo antecedente ad un sol conseguente; cioè $P:P+p::P+p:P+p+p'$. Vale a dire, che se le lunghezze dei filamenti hg, gK sieno uguali, le densità dell' aria nei punti h, g, K debbono essere continuamente proporzionali. Il che potendosi dimostrare per tutti gli elementi del filamento KF; l' è manifesto, che se prendansi nella retta AF diversi punti, le cui distanze dal punto A sieno in proporzione aritmetica crescente, le pressioni dei filamenti di aria soprapposti ad essi dovranno essere in progressione geometrica crescente: ed in questa stessa progressione dovranno essere pure le altezze barometriche in quei punti. C. B. D.

§. 78. *Cor. I.* Dunque se B ne dinoti l' altezza del mercurio nel barometro situato nel

luogo F della superficie terrestre, e b sia l' altezza del mercurio nel barometro posto nel luogo K della verticale FA, dovrà stare AF : AK :: Log. B: Log. b. Onde se con A si dinoti quella costante, che multiplicata per Log. B ne dia AF, dovrà essere pure AK=A Log. b. E ponendo FK=z, sarà z=A Log.B—A Log.b= A Log.$\frac{B}{b}$.

§. 79. *Cor. II.* E poichè qualora le densità dei diversi strati di aria paralleli all' orizzonte sono esattamente proporzionali alle forze comprimenti, la quantità b può divenirne infinitesima, e quindi l'altra $\frac{B}{b}$ infinita; l' è chiaro, che in tale ipotesi essendo sempre z=A Log.$\frac{B}{b}$, l' altezza dell' atmosfera debba essere infinita. Onde affinchè tale altezza abbia un limite, conviene assumere le densità dei diversi strati di aria paralleli all' orizzonte proporzionali alle forze comprimenti aggiunte ad una quantità costante, che ne dinoti la densità dell' ultimo strato dell' atmosfera, al quale non soprastà alcun peso. Ma poichè ascendendo fino a quell' altezza, nella quale la gravità può supporsi della stessa energia, che nella superficie terrestre, le densità dell' aria nei luoghi intermedii sono quasi esattamente proporzionali alle forze comprimenti, siccome lo additano le sperienze del Mariotte; l' è chiaro, che si possa aver per esatta l' equazione z=A Log. $\frac{B}{b}$.

§. 80. *Cor. III.* Dunque se diasi l'elevazione z di un luogo dalla superficie terrestre, e diansi pure le altezze barometriche B e b osservate contemporaneamente nei termini della retta z; si avrà la quantità costante A dividendo z per Log. $\frac{B}{b}$. Il perchè se vogliasi determinare l'altezza x di un luogo al di sopra della superficie terrestre, sarà mestieri osservare contemporaneamente le altezze B' e b', che segnano due esatti barometri, dei quali uno sia posto sulla superficie della Terra, e l'altro nel dato luogo elevato, e poi multiplicare il logaritmo di $\frac{B'}{b'}$ per la costante A. Questo prodotto dovrà dinotare l'altezza del proposto luogo sull'orizzonte.

§. 81. *Cor. IV.* Dunque se diansi tre osservazioni di altezze barometriche fatte contemporaneamente sulla superficie della Terra, in un luogo di cognita altezza, e nel luogo, di cui si voglia determinare l'altezza, e sieno questi tre luoghi pressocchè in una stessa verticale, ed ivi le temperature sieno uguali; dalla prima e dalla seconda altezza barometrica insieme coll'altezza del luogo della seconda osservazione si potrà determinare la quantità costante A, e da questa insieme colle altezze barometriche dei luoghi della prima e della terza osservazione si farà nota l'addimandata altezza di quel terzo luogo.

CAP. VII.

DEI MOVIMENTI DEI LIQUIDI, CHE SGORGANO DAI VASI.

§. 82. *Def. XIV.* La distanza, che ha il foro di un vase, o di una conserva dalla superficie superiore del liquido, che vi si contiene, dicesi altezza del liquido sul foro, ed essa superficie chiamasi *pelo del liquido*.

PROP. XIV. TEOR.

§. 83. *La velocità con cui un liquido stagnante, ch'è in un vase, comincia ad escirne per un picciolo foro fattogli nel fondo, o nelle pareti, è dovuta all' altezza del liquido su tal foro; cioè è quella stessa, che si acquisterebbe un corpo liberamente calando da un' altezza uguale a quella del liquido sul foro.*

Dim. Cas. I. Il vase (fig. 74.) CABF sia pieno di un liquido stagnante insino a PG, e nel suo fondo orizzontale aprasi in D un picciol foro. Sarà manifesto, che nel primo istante debba per esso escirne il picciol prisma di liquido DRET costantemente gravato dalla colonna DH dello stesso liquido, la quale ne soprastà al foro RD. In oltre si concepisca, che un altro cilindretto *dret* fatto di materia dura, ed uguale al prisma DRET tanto nella densità, che nel volume si lasciasse nel voto cader per dritto, finchè descriva uno spazio uguale al suo asse. Sarà la forza, che ne accelera il prisma liquido DRET, a quella che ne accelera il prisma duro *dret*, come il prisma liquido DKHR al prisma

dret. Poichè il prisma DRET n' è spinto fuori del vase dal peso del prisma DKHR, laddove il prisma *dret* discende gravato dal proprio peso. Ma gli spazietti DT, *dt* si son supposti uguali. Dunque le velocità, che avran concepute questi corpi alla fine di tali spazietti, dovranno essere (§. 177. Mecc.) in sudduplicata ragione di DK a *dt*. Ma la velocità del cilindretto *dret* è dovuta all' altezza *dt*: dunque la velocità, onde n' è cacciata dal vase la vena liquida DRET, sarà pure dovuta all' altezza DK, cioè alla distanza del foro RD dal livello PG del liquido.

Cas. II. Se il foro M stia nelle pareti laterali del vase CABF, la forza con cui la vena OM di questo liquido n' è spinta orizzontalmente per MO sarà quanto la pressione, che essa riceve dalla colonna di liquido, che avrebbe M per base, e per altezza MG (§. 28.). Dunque colla guida della dimostrazione del *Cas. I.* potrà rilevarsi, che la velocità di questo getto di liquido sia dovuta all' altezza di esso sul foro. C. B. D.

§. 84. *Cor. I.* Il perchè se dentro diversi vasi si pongano liquidi di densità diverse; le velocità, onde questi cominceranno ad escire per piccioli fori fatti nei fondi, o nelle pareti laterali di essi vasi, saranno in sudduplicata ragione delle altezze di quei liquidi sopra gli stessi fori (§. 59. Mecc.).

§. 85. *Cor. II.* E poichè il volume liquido, che in un dato tempo sgorga da un dato orifizio fatto in un vase, è maggiore o minore a misura che maggiore o minore è la velocità colla quale quel fluido esce dal vase; l' è chiaro, che la velocità, onde un liquido esce da un foro fatto

nel vase, ov'esso liquido si contiene, sia proporzionale al volume liquido, che ne sgorga in un dato tempo. Ma la quantità di moto di un corpo è proporzionale alla massa di esso moltiplicata per la sua velocità (§. 64. Mecc.), e tal massa è poi proporzionale al volume del corpo multiplicato per la sua densità. Dunque la quantità di moto del liquido, che sgorga per l'orifizio di un vase è proporzionale alla velocità del liquido multiplicata per se stessa, ed alla densità dello stesso liquido; cioè alla densità del liquido ed al quadrato della sua velocità.

§. 86. *Cor. III.* In oltre, poichè la corrente di un fiume, la quale si fa strada per una sezione di questo, si può considerare come se sgorgasse dall'orifizio di un vase uguale ad essa sezione; l'è chiaro, che la forza, onde quella corrente ne andrà a percuotere perpendicolarmente un dato ostacolo, debba essere proporzionale alla densità dell'acqua multiplicata pel quadrato della sua velocità.

§. 87. *Cor. IV.* Sieno a ed a' le superficie delle ali di due mulini, sulle quali con una stessa velocità s'imbatta perpendicolarmente la corrente di un fiume. Sarà il numero dei filamenti, che ne incontrano la superficie a, a quello, che ne incontrano la superficie a', nella ragione di $a:a'$. Il perchè dovrà stare il momento dell'acqua sulla prima superficie al momento dell'acqua sulla seconda nella ragione di a ad a'.

§. 88. *Cor. V.* Suppongasi, che la superficie (fig. 75.) AB ne sia perpendicolarmente percossa dalla corrente di un fiume, e l'altra AC uguale ad AB ne sia percossa obbliquamente. Dovrà stare la forza, onde n'è spinta la super-

ficie AB a quella, onde n'è spinta la superficie AC, nella ragione del raggio al seno dell'angolo formato dalla direzione dei filamenti colla superficie AC (§. 87. Mecc.), e del numero dei filamenti di acqua, che ne incontrano la superficie AB al numero di quei filamenti, che ne incontrano la superficie AC. Ma il numero dei primi filamenti sta a quello dei secondi nella ragione del raggio al coseno dell'angolo CAO, ovvero nella ragione del raggio al seno dell'angolo ACO, formato dalla direzione dei filamenti di acqua colla superficie AC. Dunque se le superficie AB, AC sieno uguali, e di esse la prima siane percossa perpendicolarmente dalla corrente di un fiume, e l'altra obbliquamente; la forza, onde n'è spinta la superficie AB, dovrà stare a quella, onde n'è spinta la superficie AC, in duplicata ragione del raggio al seno dell'angolo formato dalla direzione dei filamenti di acqua colla superficie AC.

§. 89. *Cor. VI.* Il perchè se le superficie AB, AC sieno disuguali, e di esse la prima siane perpendicolarmente percossa dalla corrente del fiume, e l'altra obbliquamente; dovrà stare la forza, onde n'è spinta la prima superficie, a quella, onde n'è spinta la seconda, in ragion composta dell'ampiezza della prima superficie a quella della seconda, e del quadrato del raggio al quadrato del seno della direzione della corrente colla seconda superficie.

§. 90. *Esp. V. In ogni fontana, che abbia il getto saliente, il liquido, che sgorga dal foro, si spinge fino ad un'altezza, ch'è alquanto minore di quella del liquido sul foro: ed in parità di circostanze la differenza di*

tali altezze è tanto maggiore per quanto maggiore n' è l'altezza del liquido sul foro. In fatti Mariotte avendo accuratamente istituite delle sperienze su tal soggetto osservò, che essendo alquanto piccolo l' angolo fatto dalla verticale colla direzione del getto, e

L'altezza dell' acqua sul foro di		*Il foro di figura circolare, e del diametro di*	*L'altezza del getto era di*	
5.pie.	o.pol.	6.lin.	4.pie.	11.poll.
5.	6.	6.	5.	3.
12.	4.	4.	12.	o, 5.
24.	5.	6.	22.	10.
24.	5.	3.	22.	2.
26.	1.	10.	23.	9.
26.	1.	3.	22.	o.
34.	11 $\frac{1}{2}$	6.	31.	9.
34.	11 $\frac{1}{2}$	3.	28.	o.

§. 91. *Esp. VI. Il signor Bossut dalle sperienze ha rilevato, che in parità di circostanze un getto verticale si spinge ad un' altezza minore di quella, alla quale perviene qualora il getto si trova alquanto inclinato all' orizzonte.*

§. 92. *Cor.* Le prime particelle del liquido di un getto verticale nel discendere da quell'altezza, cui si sollevano, ne urtano le altre, che ad esse succedono, e ne diminuiscono la velocità di queste. Onde avviene, che appena aperto l' orifizio, il liquido vedesi montare ad un' altezza maggiore di quella, cui in seguito ne perviene, quantunque l' altezza di esso entro al vase si mantenga sempre la medesima. Il

perchè la massima altezza del getto di una fontana è quella, cui l' acqua ascende allora che essa sgorga per una direzione inclinata all'orizzonte.

§. 93. *Scol.* Ma qual sarebbe l' altezza di un getto saliente, se le particelle del liquido non stropicciassero contro le pareti del tubo, che esse traversano, e non vi fosse la resistenza dell'aria? Le particelle dell'acqua in percorrendo la linea di salita formata dallo zampillo non si possono considerare come staccate e non urtantisi tra loro; poichè le superiori, essendo uscite prima dall' orifizio, han ricevuto maggior numero di spinte dalla gravità terrestre, che le inferiori: onde la velocità delle prime dev' essere minore di quella delle seconde; e perciò nella linea di salita le prime particelle debbono premerne le seconde, ed esserne urtate da queste. Dunque facendo astrazione dalla resistenza dell' aria, e dallo stropicciamento delle particelle del liquido contro le pareti del tubo, la linea di salita del getto liquido non dev' essere una parabola conica, avente per diametro la verticale condotta per l' orifizio dello zampillo, e per parametro di un tal diametro il quadruplo dell' altezza del liquido sul foro (§.233.Mecc.); laddove nella linea di discesa le particelle inferiori avendo ricevuto maggior numero di spinte delle superiori non possono impedirne il movimento di queste, nè ricevere da esse alcuna spinta. Il perchè questa linea, non già quella di salita del getto, ne sarebbe una parabola, se non vi fosse la resistenza dell' aria.

PROP. XV. TEOR.

§. 94. *Se un vase costantemente pieno di un liquido abbia ovunque un picciol foro, la cui ampiezza sia* f , *ed* a *la di lui distanza dal livello del liquido ; sarà il numero dei pollici cubici di un tal liquore, che ne sgorga in un numero* n *di secondi , uguale a* 2fn'' $\sqrt{181^{pol.},2.a}$. *Posto che* a *siasi ridotto a pollici , ed* f *a pollici quadrati.*

Dim. Suppongasi , che la prima vena di liquido uscita pel foro f serbi nel suo progresso quella medesima velocità e direzione , che ella vi ebbe all' uscir dal foro , e che lo stesso ne addivenga alle altre vene successive. E poi si dica c cotesta velocità costante , e t un dato tempo. Sarà chiaro , che la mole del liquido sgorgata in tal guisa nel tempo t debba formare un prisma retto , la cui base è quel foro , e l' altezza lo spazio corso equabilmente nel tempo t , e colla celerità c della stessa prima vena. Ma questo spazio è quanto ct. Dunque quella quantità di liquido sarà fct. Or lo spazio descritto nel primo minuto secondo da un grave, che si lasci giù cadere liberamente , è uguale a $15^{pie.}$, 1 parigini , cioè a $181^{pol.}$, 2 (§. 148. Mecc.), e la velocità dovuta a quest'altezza dev' essere il doppio di $181^{pol.}$, 2, cioè $362^{pol.}$, 4. Dunque (§.45. Mecc.) dovrà essere $\sqrt{(181^{pol.},2)}:\sqrt{a}::362^{pol.},4:c$, e quindi sarà $c=2\sqrt{(181^{pol.},2.a)}$, e 'l numero de' pollici cubici di liquido sgorgato per l' orifizio f nel tempo t , e che si è trovato uguale ad fct , sarà uguale a $2ft\sqrt{(181^{pol.},2.a)}$: e supposto che il tempo t contenga il numero n di secondi , la stessa quan-

tità di liquido dovrà essere dinotata da $2fn''$ $\sqrt{(181^{pol.}, 2. a)}$, ove a n'è ridotta a pollici, ed f a pollici quadrati. C. B. D.

§. 95. *Cor. I.* E chiamando q la quantità di liquido, che esce nel tempo t dal foro f aperto in un vase costantemente pieno di un tal liquore; sarà I.° $q=2fn''\sqrt{(181^{pol.}, 2. a)}$, II.° $n''=q : 2f\sqrt{(181^{pol.}, 2. a)}$, III.° $c=2\sqrt{(181^{pol.}, 2. a)}=q : fn''$.

§. 96. *Cor. II.* Descrivasi la parabola (fig. 76.) MIB coll' asse MB verticale, e col di lui parametro p uguale a $15^{pie.},1$, o a $181^{pol.},2$, e troncata l' ascissa MB uguale a questo parametro, si tiri la corrispondente semiordinata BI. Sarà chiaro, essere questa retta di $181^{pol.},2$. Poichè essendo $BI^2=p. MB=(181^{pol.}, 2)^2$, sarà $BI=181^{pol.}, 2$, e $2BI=2. 181^{pol.}, 2$. Laonde se prendasi nell' asse l' altra ascissa MC uguale ad a, e pel di lui estremo le si conduca la semiordinata CA; dovrà essere $\sqrt{MB} : \sqrt{MC} :: 2BI : 2CA$; cioè $\sqrt{181^{pol.},2} : \sqrt{a} :: 2.181^{pol.},2 : 2.CA$, e quindi $2CA=2\sqrt{(181^{pol.},2.a)}$.

§. 97. *Cor. III.* Dunque la velocità dovuta all' ascissa verticale MC di questa parabola sarà espressa dal duplo di CA semiordinata corrispondente: e le tre formole del Cor. I si trasformeranno in queste altre I.° $q=fn''. 2CA$, II.° $n''=q : f. 2CA$, III.° $2CA=q : fn''$.

PROP. XVI. TEOR.

§. 98. *Il vase (fig. 76.)* LQE *rigido, e di qualunque figura, riempiasi di acqua o di altro liquido, che poi ne sgorghi pel picciolissimo foro* F *fatto nel suo fondo, o nelle*

pareti : dico essere la velocità , onde deprimesi un qualunque strato orizzontale LE *di questo liquido , a quella colla quale ne sgorga pel foro* F *, come la grandezza del foro* F *a quella dello strato* LE.

Dim. Nel vase LQE' pieno di un liquido stagnante intendansi fatte le sezioni *le* , λε , ec. parallele allo strato LE del liquido , le quali sieno vicinissime tra loro , e ne tronchino dal vase gli spazii uguali L*le*E , *l*λε , ec. Di poi aprasi di repente il foro F , onde ne sgorghi l'acqua. Sarà chiaro , che non può mai la porzione di questo liquido rinchiusa nello spazio L*le*E girne ad empiere l'uguale spazio *l*λε , se altretttanto di liquido non sia di già escito per esso foro. Laonde se il prisma , avente F per base ed FG per altezza , sia uguale al volume di questo liquido uscito per F ; sarà il prisma L*le*E uguale all' altro di F in FG ; imperciocchè in ciascuno di questi due solidi si contiene una stessa quantità di liquido. E quindi dovendo essere le loro basi reciproche alle altezze , sarà F:LE::C*c*:FG. Ma le rette C*c* ed FG son due spazietti insieme descritti dallo strato LE di liquido , che deprimesi equabilmente , e della vena F , ch' equabilmente ne sgorga per lo foro : ed essi sono come le velocità , onde deprimesi quello strato di liquido , e ne sgorga questa vena (§. 26. Mecc.). Dunque sarà la velocità dello strato LE a quella del liquido sgorgante per lo foro come la grandezza del foro a quello dello strato. C. B. D.

§. 99. *Cor.* Di quì si rileva , che le velocità , onde muovonsi in un dato istante gli strati LE, KH del divisato liquido , debbono essere

nella ragione inversa degli stessi strati. Dunque *se un liquido trascorra entro di un qualunque vase rigido, che vadasi stringendo all' ingiù; le velocità dei suoi strati saranno inversamente come le ampiezze di questi.*

§. 100. *Scol.* Quì ho tacitamente supposto, che i diversi strati di un liquido, il quale muovasi entro di un vase rigido, serbino sempre un perfetto parallelismo, e che la velocità di ciascuno strato non cangi di direzione: cosicchè tutte le particelle di liquido, che il compongono abbiano ad avere un identico movimento. Or queste supposizioni son vere, quando il liquido sgorghi per un picciolo foro aperto nel vase, o ne fluisca in un tubolino saldatogli nel fondo, o nelle sue pareti. Ma se l' apertura del foro sia ben grande, o molto ampla la bocca del tubo saldato al vase; esse non potran reggere, come quaggiù ve lo dichiaro, se non si dimostri, che la linea, che passi pei centri degli strati del liquido sia una retta loro perpendicolare.

PROP. XVII. PROBL.

§. 101. *Il vase (fig.ª 76.)* LQE *nato dalla rivoluzione della curva* QKL *intorno al di lei asse* QC *verticale, sia ripieno d' acqua, ed ovunque in fondo o nelle sue pareti si apra il picciol foro* F; *si domanda il tempo, in che si va votando d' acqua cotesto vase.*

Sol. I. Dal foro F si meni la FM perpendicolare all' asse QC del detto vase: e poi nel piano FMC si descriva la parabola conica MBI, avente per vertice principale il punto M, per

asse la MC, e per parametro principale una retta di piedi parigini 15, 1.

II. Nello stesso piano FMC ed intorno al medesimo asse MC si descriva l' altra curva PRT tale, che qualunque sezione KH fatta orizzontalmente nel vase sia uguale al rettangolo di ND e DR corrispondenti ordinate della parabola e di questa curva.

Sarà il quoto, che nasce dividendo l' aja CPRD *per lo doppio foro* F, *il numero dei minuti secondi, in che si vota d' acqua la parte* LKHE *del vase.*

Dim. Prendasi nell' asse la C*c* infinitesima rispetto a CD, e pei punti C e *c* distendansi nel vase le sezioni orizzontali LE, *le*. Sarà il tempo, che la suprema superficie dell' acqua v' impiega a deprimersi in *le* uguale a quello, che ci vuole ad escirne pel foro F la quantità dello stesso liquido contenuta nel cilindretto L*le*E cioè a fluirne per F il picciol prisma FG. Dunque sarà il prisma, che tien per base il foro F e per altezza FG, uguale al cilindretto L*le*E, cioè al prodotto di C*c* nella sezione LE del vase, o di C*c* in ACP (per costuz.), cioè ad un prisma, che abbia CA per altezza, e per base il rettangolo di PC in C*c*. Laonde per l'equalità di questi due prismi, dovendo essere le loro basi reciproche alle altezze, sarà CP.C*c*:F::FG:AC, e quindi C*cp*P:2F::FG : 2AC::F.FG:F.2AC. Ma poichè in questo tempuscolo può considerarsi il vase come ripieno d' acqua insino ad LE, ed F.FG n' è la quantità di un tal liquido uscita in esso tempuscolo; sarà la durata di questo tempuscolo (§. 97. n.° 11.°) uguale ad F.FG:F.2AC. Dunque lo stesso tem-

puscolo potrà eziandio designarsi per CcpP:2F e quindi il tempo, in che lo strato supremo LE di questo liquido deprimesi in KH, sarà di tanti secondi quanti ne indica il quoto dell'aja CPRD per lo doppio del foro F. C. B. D.

§. 102. *Cor. I.* La parabola MNI, la curva QKL generatrice del vase, e la curva dei tempi PRT hanno tal nesso tra loro, che da due di esse può rilevarsi l'altra, che ne rimane. E quindi da ciò si potranno risolvere non pochi Problemi su i tempi, onde si votano d'acqua diversi tubi.

§. 103. *Cor. II.* Essendo i cerchi come i quadrati dei loro raggi, saranno LC^2 e KD^2 come i rettangoli ACP, NDR, cui quei cerchi si son supposti uguali.

PROP. XVIII. TEOR.

* 104. *La linea generatrice del vase* LQE *sia una parabola biquadratica, cioè tale che i quadrato-quadrati delle sue ordinate* LC, KD, *ec. seguano la ragione delle loro ascisse* QC, QD, *ec., e situato cotesto vase col vertice in giù e colla base all'insù, si riempia di acqua, che poi facciasi sgorgare per un picciol foro aperto nel suo vertice* Q; *sarà questo vase un esattissima clepsidra, o un oriuolo ad acqua: ove la superficie di tal liquore scenderà uniformemente da* LE *sino a* Q, *passando in tempi uguali parti uguali dell'asse.*

Dim. Dicansi V e v le velocità, ond'esce l'acqua per lo foro Q, quando il suo strato supremo passi per le sezioni LE, KH del vase. I semidiametri di queste sezioni si chiamino Y

ed y, ed X ed x le loro ascisse QC, QD. E finalmente sia C la velocità costante con cui si deprime la superficie dell' acqua entro la clepsidra, ed f il semidiametro del picciolissimo foro aperto in Q. Dovrà essere (§. 99.) $V:C::Y^2:f^2$, e $C:v::f^2:y^2$: Dunque sarà *ex aequo* $V:v::Y^2:y^2$. Ma sta poi $V:v::\sqrt{X}:\sqrt{x}$. Dunque dee stare $Y^4:y^4::X:x$. C. B. D.

§. 105. *Esp. VII. Se mentre un liquido sgorghi per un picciol foro fatto nel fondo di un vase prismatico verticale, ov' esso liquido si contiene, si pongano nello stesso vase dei corpicciuoli di una gravità specifica poco maggiore di quella del liquido; questi si vedranno tutti discendere verticalmente sino a tal distanza dal fondo, che sarà a un di presso uguale al triplo del raggio del foro: di poi quei corpicciuoli si vedranno percorrere altrettante linee curve, le cui convessità saranno rivolte alla retta verticale distesa pel centro del foro; tal che la corrente del liquido presso al foro formerà una conoide molto convergente, di cui l' altezza sarà a un di presso uguale al triplo del raggio del foro, la base superiore sarà quanto quella del vase, e la inferiore il foro fatto nel fondo dello stesso vase. Una tal conoide dicesi gorgo. Questo gorgo si formerà pure qualora il foro sia fatto nella sponda del vase.*

§. 106. *Cor.* Adunque se il foro sia fatto nel fondo dello stesso vase, il liquido contenuto tra la superficie del gorgo e quel fondo si manterrà stagnante fino a che non sia uscita per esso tutta la rimanente quantità di liquido posta entro al vase.

§. 107. *Esp. VIII. Se il liquido posto entro ad un vase sgorghi per un picciolo foro fatto in una sottile lamina del fondo o delle pareti del vase; la vena del getto si stringerà rapidamente per breve tratto; tal che le particelle del liquido, provenienti dalle opposte pareti del vase, progredendo per direzioni tra se convergenti nel formare il gorgo, seguiranno le medesime direzioni per breve tratto al di fuori del vase, e formeranno una continuazione di quella conoide, che dentro al vase costituisce il gorgo. Questa porzione di tal conoide, che trovasi fuori del vase, dicesi* vena *contratta, e la sezione fatta nel getto liquido nel luogo del massimo ristringimento, dicesi* sezione della vena contratta.

§. 108. *Esp. IX. La distanza del foro fatto in un vase dalla sezione della vena contratta è poco minore del raggio dello stesso foro: e l' ampiezza di tal sezione è a un di presso uguale ai tre quinti dell' ampiezza del foro.*

§. 109. *Esp. X. Qualora l' ampiezza del foro è molto picciola rispetto a quella del vase, il sito, e la quantità della contrazione della vena liquida sgorgante dal foro rimarranno sensibilmente costanti comunque si facciano variare o la direzione del getto, o l' altezza del recipiente, o l' ampiezza del foro.*

§. 110. *Cos. I.* L' accelerazione, onde l' acqua affluente dalla velocità pressocchè insensibile, colla quale discende entro al vase, passa ad acquistare la velocità finita dell' efflusso, si compie tutta nello spazio compreso dal gorgo e dalla vena contratta (§. 99.). Per tale spazio

al restringersi rapidamente gli strati orizzontali dell' acqua in moto, rapidamente si aumenta la velocità del liquido. (§. 99.); e quindi al restringersi l' ampiezza del foro in parità di circostanze, si aumenta la velocità dell' efflusso, e dei getti salienti se ne aumenta l' altezza.

§. 111. *Cor. II.* Dunque ogni vase prismatico dee riguardarsi come terminato da un tubo convergente formato dal gorgo e dalla vena contratta. La precisa forma di questo tubo addizionale è sconosciuta; ma la lunghezza di esso adegua a un di presso il duplo del diametro del foro.

§. 112. *Cor. III.* Il perchè volendo applicare la teorica stabilita nella Prop. XV, in vece dell' ampiezza del foro si dovrà prendere la sezione della vena contratta, e valutare per altezza del vase quella del fluido su tal sezione. Poichè l' azione scambievole degli strati liquidi, e l' accelerazione, che n' è l' effetto, non termina nel foro del vase, ma procede fino alla sezione della vena contratta. Dunque tal sezione dovrà riguardarsi come il foro del vase.

§. 113. *Cor. IV.* E quindi se il foro f sia di figura circolare, che abbia r per raggio, e si facciano le indicazioni del §. 94., posto il rapporto dell' ampiezza del foro alla sezione della vena contratta uguale a quella di $5:3$; la quantità di liquido, che nel numero n di secondi dovrà sgorgare per l' orifizio f, sarà uguale a

$$\frac{6}{5} f n'' \sqrt{\left(181^{\text{pol.}},\ 2(a+r)\right)}.$$

§. 114. *Esempio.* Nel fondo di un vase costantemente pieno d' acqua insino all' altezza di

10 piedi parigini aprasi un foro circolare del diametro di un sol pollice; si domanda quant' acqua ne sgorghi in un minuto primo? Paragonando queste particolari grandezze con quelle, che trovansi nella formola del §. prec., si avrà $n''=60''$, $a=10^{pi.}=120^{pol.}$, $r=0,5$, ed essendo a un di presso 113:355 come il diametro di un cerchio alla sua periferia, sarà la circonferenza del foro, che ha un pollice di diametro, di $\frac{355}{113}$ di pollice, e l' ampiezza dello stesso foro dovrà essere di $\frac{355}{452}$ di un pollice quadrato. Dunque sarà

$$\frac{6}{5}fn''=\frac{360}{5}\times\frac{355}{452}=56,549,$$

$$\sqrt{(181^{pol.},2\times 120,5)}=\sqrt{(21834,60)}=147,764, \text{ e}$$

$$\frac{6}{5}fn''\sqrt{\left(181^{pol.},2\,(a+r)\right)}=8355^{pol.\ cub.},2.$$

Dunque l' acqua sgorgata in un minuto primo dall' orifizio del vase sarà di circa 8355 pollici cubici.

§. 115. *Def. XV. Linea centrale* di un liquido, che trascorre in un vase, è quella, che passa pei centri di gravità degli strati di esso paralleli al supremo.

PROP. XIX. PROBL.

§. 116. *Dal canale (fig. 77.)* ADGH *costantemente pieno d' acqua sino al* AH *ne scorra questo liquido per l' apertura* DG *col-*

la velocità c; ritrovare la forza acceleratrice dell' elemento d' acqua LleE *compreso tra i due strati* LE, *le perpendicolari alla linea centrale* ICK.

Sol. I due strati LE, *le* dell' acqua, che scende per lo tubo ADGH, sieno vicinissimi, paralleli tra loro, e ad entrambi ne insista a squadra la linea centrale ICK nei punti C, e *c*. Per questa linea ICK, che suppongasi giacere in un piano verticale, si distenda il piano HABDG, e condottavi dal punto A la retta verticale AB, si calino su di essa dai punti C, *c*, D le perpendicolari CM, *cm*, DB. In oltre pongasi AM$=x$, IC$=s$, e si dica X lo strato LE del liquido, o l' altro *le*, F l' apertura AH del vase ADGH, ed f il di lui foro DG. Sarà, condotta la Cr parallela ad M*m*, Cr=dx, Cc=ds; e il picciolo prisma L*le*E=Xds. E ponendo uguale ad 1 la gravità specifica dell' acqua, dovrà la grandezza Xds dinotare il peso dell' acqua del prisma L*le*E: e l' altra Xdx esprimerà quella forza, onde lo stesso prisma d' acqua n' è animato per C*c*. Imperocchè sta (§. 184. Mecc.) C*c* : Cr, cioè ds a dx come il peso del prisma d' acqua L*le*E, espresso per Xds, ad una tal forza per C*c*, che dovrà esprimersi per Xdx.

Ciò posto. Il prisma L*le*E si consideri per un solo istante come un corpicciuolo rigido, e senza peso, sicchè l' acqua posteriore ne gravi per C*c* la sua base LE, e l' anteriore *l*DG*e* sospingane per C*c* l' altra base *le* dello stesso prisma. E suppongasi la prima di coteste pressioni essere uguale ad una colonna d' acqua, avente LE per base, e per altezza l' indeterminata y, cioè uguale ad Xy. Sarà X (y+dy) quell' al-

tra forza, che spinge per Cc la base le: e quindi da questa pressione togliendone la prima, sarà Xdy l'effettiva forza, colla quale il prisma $LleE$ sarebbe sollevato per Cc, s'ei non avesse altra tendenza. Ma quì sopra si è dimostrato, che il prisma d'acqua $LleE$ n'è animato per Cc con una forza espressa per Xdx. Dunque l'effettiva forza, con cui questo prisma tende all'ingiù per Cc, sarà uguale ad $Xdx-Xdy$, e la di lui forza acceleratrice sarà (1).

$$(Xdx-Xdy):Xds.$$

Per la qual cosa chiamando v la celerità, dello strato LE sarà (§. 180 Mecc. eq. (2)).

$$\left(\frac{Xdx-Xdy}{Xds}\right)ds=vdv,$$

cioè $$dx-dy=vdv,$$

ed integrando si avrà

$$x-y=\frac{1}{2}v^2+C \quad . \ . \ . \ . \ (A).$$

Or se dicasi c la velocità, con cui l'acqua ne va equabilmente sgorgando per lo foro DG; sarà $v:c::f:X$ (§. 99.), e quindi $v=cf:X$, ed $\frac{1}{2}v^2=c^2f^2:2X^2$. E poi la costante C dev'essere talmente determinata, che quando la variabile x è zero, l'altra y diviene uguale alla pressione atmosferica in A, cioè alla colonna d'acqua di un'altezza, che si chiami a: ed X si fa in tal

(1) La forza motrice di un corpo divisa per la di lui massa dà la forza acceleratrice (§§ 157 e 164 Mecc.).

caso uguale ad F. Dunque sarà $C=-a-c^2f^2:2F^2$ e quindi surrogando questi valori di $\frac{1}{2}v^2$, e di C nell' equazione (A), avrassi

$$x-y=\frac{c^2f^2}{2X^2}-a-\frac{c^2f^2}{2F^2},$$

ed $y=x+a+c^2f^2\left(\frac{1}{2F^2}-\frac{1}{2X^2}\right)$. C. B. F.

PROB. XX. PROBL.

§. 117. *Poste le medesime cose del Problema precedente, ritrovare la velocità* c, *onde uniformemente sgorga l' acqua per lo foro* GD.

Sol. L' altezza della colonna d' acqua, ch' esprime la pressione del liquido nel forame GD, si chiami A, e dicasi b l' ascissa AB, che corrisponde al centro K di esso foro, la cui grandezza sia f. E nell' equazione finale del Problema precedente si sostituiscano A, b, f in luogo delle grandezze y, x, X, che vi si ritrovano; sarà

$$A=b+a+\frac{c^2f^2}{2}\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{f^2}\right).$$

E praticando le dovute riduzioni, otterrassi

$$c=F\sqrt{2\left(\frac{a+b-A}{F^2-f^2}\right)}. \ldots\ldots \text{C. B. F.}$$

§. 118. *Cor. I.* Se la grandezza a differisca per pochi piedi dall' altra A, come suole addivenire quando il vase ADGH non sia di gran lunghezza; quest' ultima equazione si ridurrà alla seguente

$$c = F\sqrt{\left(\frac{2b}{F^2 - f^2}\right)} \quad \ldots \quad (1).$$

§. 119. *Cor. II.* E se la gravità acceleratrice nelle vicinanze della nostra Terra sia uguale ad 1, e dicasi B l'altezza dovuta alla velocità c; sarà B (§. 181. Mecc. eq. (7)) uguale a $c^2 : 2$, e quindi uguale a $bF^2 : (F^2 - f^2)$, ed $F^2 - f^2 : F^2 :: b : B$. Dunque *l'altezza dovuta alla velocità di questo getto sarà all'altezza dell'acqua sul foro come il quadrato della sezione suprema di questo liquido al suo eccesso sul quadrato del foro.*

§. 120. *Cor. III.* Ed essendo il foro f picciolissimo rispetto alla bocca F del vase; sarà $F^2 - f^2$ quasi uguale ad F^2. E quindi *essendo picciolissimo il foro di un vase, la velocità dello getto sarà dovuta all' altezza dell' acqua sul foro.*

§. 121. *Cor. IV.* Adunque quanto maggiore è l'ampiezza del vase rispetto a quella del foro, tanto maggiore dev' essere la velocità dello getto; e ne' getti salienti tanto maggiore dev' essere l'altezza, cui giunge lo zampillo. E di quì possiamo intendere la ragione di quelle apparenti anomalie, che dal Mariotte furono rilevate nelle altezze degli getti salienti (§. 90.)

PROP. XXI. TEOR.

§. 122. *Se un vase pieno di aria naturale, e ben chiuso, intendasi posto in un gran vuoto,*

---

(1) Se f sia maggiore di F cotesto radicale ne diviene immaginario, e ne indica non potersi rendere uniforme lo sgorgo dell' acqua pel foro f.

e quivi apertogli un picciol foro ; la velocità dell' aria uscente dal vase sarà sempre di 1248 piedi parigini.

Dim. Al foro del proposto vase concepiscasi verticalmente adattato un tubo dell' altezza di $25789^{pie.}, 8$ pieno di un liquido tanto denso, quant' è l' aria naturale. La pressione di questo liquido del tubo dovrà equilibrarsi coll' elatere dell' aria nel vase (§. 64.). Dunque la velocità, onde quel liquido si spingerebbe nel vase, se questo fosse sgombro di aria, dovrà uguagliare la velocità dell' uscita dell' aria dal vase al voto. Ma quella velocità è dovuta all' altezza di $25789^{pie.}, 8$, e quindi tale che con essa un corpo potrebbe correre equabilmente (§. 148. Mecc.) lo spazio di $2\sqrt{(15^{pie.},1 \times 25789^{pie.},8)}$, o sia di $1248^{pie.}$ in un minuto secondo. Dunque la velocità iniziale dell' aria, ch' esce dal vase nello spazio voto sarà pure di $1248^{pie.}$. C. B. D.

§. 123. *Cor. I.* La velocità, onde l' aria naturale n' è projettata dal di lei elatere, è di 1248 piedi, ch' è a un di presso quanto la velocità iniziale di una palla vibrata da una gagliarda carica di un cannone da 24. Ma questa velocità cresce a misura che l' aria si ristringe in minor volume. Dunque se l' aria venga gagliardamente compressa in un recipiente; la velocità, ond' essa ne sarà projettata da quel recipiente nel vuoto sarà tanto maggiore di 1248 piedi, per quanto la pressione, che essa soffre in quel recipiente è maggiore della pressione atmosferica.

§. 124. *Cor. II.* Il perchè se facciasi un foro ad un recipiente, nel quale l' aria siavi stata gagliardamente compressa; la velocità,

onde quest' aria ne spingerà l' aria esteriore, dovrà essere assai grande. Il che vien confermato dalle sperienze, che si eseguono col *fucile pneumatico*.

CAP. VIII.

RAGIONAMENTO SULLE RESISTENZE, CHE FANNO I FLUIDI AI SOLIDI, CHE DENTRO DI ESSI SI MUOVONO.

§. 125. Un solido, che si muove in un liquido, dee in ogni istante spignere quelle particelle di questo, che gli si parano d'avanti, e staccarle dalle adjacenti, e ad esse imprimendo una parte del suo moto rendersi men veloce di quel, che ne sarebbe ito nel vuoto. E quindi le leggi, onde muovesi un solido nei mezzi resistenti, son ben diverse da quelle, che in parità di altre circostanze sarebbergli convenute ne' mezzi liberi; i principii fisici, dai quali esse derivansi, son differenti dagli usati: e gli artifizii di Geometria, ed i ripieghi analitici, che convien praticarvi, esigono un nuovo ed accurato magistero. Or queste cose non furono vedute da Geometri anteriori al Gran Newton, che volendo determinare la resistenza di un solido mosso in un fluido, considerò la natura di questo sotto due diversi aspetti. Cioè egli concepì *un fluido composto di globettini elastici, staccati tra loro, siti a distanze uguali, e con una costante forza centrifuga respignentisi l' un l' altro*. Onde tal fluido, non avendo a contatto le sue parti, dev' essere molto raro, e non compresso. Oltre a questo

ne concepì un altro, *che avendo le di lui parti a contatto dev' essere continuo, denso, è compresso:* com' è l' acqua, l' olio, il mercurio, ed altri simiglianti fluidi.

§. 126. Or quantunque questi fluidi, che in secondo luogo ha esaminati l' Illustre Newton, sieno reali, e non immaginarii; pure il metodo, di che ei si avvale per valutarne la loro resistenza, è fondato su precarie supposizioni. Ed oltre a ciò i risultati di tali ricerche son contradetti dalle più sicure ed adeguate sperienze. Ma l' essenza de' primi fluidi è un gruppo di precarie supposizioni: onde ogni ricerca, che può farvisi, sarà un' indagine solamente curiosa, e non applicabile alla natura.

§. 127. I Geometri, che con metodi diversi dal neutoniano vollero indagar le resistenze de' solidi mossi ne' fluidi, non essendo riusciti a determinare i giusti valori di siffatte resistenze, si videro obbligati d' interrogare la Natura colla voce dell' esperienza. E poichè questi loro tentativi non erano diretti alla sola cognizione de' moti ne' mezzi resistenti, ma al perfezionamento dell' *Architettura Navale*; anche le Società Accademiche, ed i promotori del pubblico bene vi accorsero a secondarli. Ed in vero sotto gli auspicii della Reale Accademia delle Scienze di Parigi si fecero nel 1679 varie sperienze sull' impeto di una vena d' acqua cadente su di un piano: e si raccolse che una tal forza era quanto il peso di una colonna d' acqua avente per base il foro, ond' ella sgorgava, e per altezza quella del liquido. Laddove il signor Krafft, rifacendo per ordine dell' Accademia di Pietroburgo le sperienze, ch' eransi fatte da Daniele Bernoulli,

scrisse nel 1737, *essere la divisata forza pressocchè dupla di quella, ch' erasi trovata dagli Accademici Parigini.*

§. 128. Per alquanti anni i Geometri si rimasero inoperosi nello scandagliare tali forze. Ma dal 1763 fino al 1776 ne furono prodotte le più compite e decisive opere, i cui risultati mi fo un dovere rapportarveli.

§. 129. L' ingegnosissimo Cavalier de Borda adoperando una banderuola, che in virtù di un peso facevasi muovere verticalmente nell' aria, ed orizzontalmente nell' acqua, rilevò i valori ed i rapporti delle resistenze de' solidi mossi nell' aria e nell' acqua (1), e ne compì due dotte Dissertazioni, che leggonsi nelle Mem. de l' Acc. de Scien. an. 1763, 1767. Verso il 1770 apparve nell' Accademia di Marina di Brest una bella Dissertazione del signor Marguerie, il quale dall' esperienze del signor Thevenard avea raccolte molte verità su tal soggetto. E nel 1771 il valentissimo Geometra Spagnuolo D. Giorgio Ivan Commendatore de Alliaga, e Capo Squadra di S. M. Cattolica diè in luce una ragionatissima Opera sulle resistenze de' fluidi (2),

---

(1) Da' risultati delle sperienze del Cavalier de' Borda raccoglicsi *essere la resistenza di una sfera $\frac{2}{6}$ di quella del cilindro circoscrittibile ad essa, posto che questi solidi con uguali velocità si muovessero in uno stesso fluido per le direzioni de' loro assi.*

(2) Quest' Opera scritta in idioma Spagnuolo è divisa in due Vol. in 4°, ed ha per titolo *Esame Marittimo Teorico-pratico*, o *Trattato di Meccanica applicato alla costruzione, cognizione, e maneggio delle Navi ed altre Imbarcazioni.*

Nel vol. 51 delle Trans. Anglicane evvi una consi-

ove tra le altre nuove indagini evvi, che i valori di queste forze non solo dipendano dalla densità del fluido, dalla celerità del mobile, e dall' incidenza del fluido sul solido, ma eziandio dalle diverse profondità, che ha esso mobile dentro al fluido. Onde dalle sperienze e ragionamenti di questo Gran Geometra può trarsi il seguente Teorema generale « cioè *la resistenza di un solido mosso in un fluido è in ragion composta della densità del fluido, della celerità del mobile, della di lui superficie percossa dal fluido, del seno dell' angolo d' incidenza, e della radice quadrata della profondità di esso mobile nel fluido* ». Ma un tal Teorema, com' ei lo avverte, non sarà vero se la parte anteriore del mobile non sia simile ed uguale alla posteriore, e se il solido non istia tutto immerso nel fluido.

§. 130. Ma finalmente i sommi Analisti, il signor D' Alembert, il Marchese di Condorcet, e l' Abbate Bossut han determinate coteste resistenze colla luce delle più chiare sperienze, e cogli artifizii della più saggia speculazione: secondando le ottime mire del signor Turgot Controloro generale delle Finanze di Francia; il quale gli avea incaricati d' indagare i mezzi, onde perfezionarsi l' interna navigazione di tal Regno, ed accordò loro a tal uopo de' ricchi fondi. I risultati di siffatte sperienze, che si possono adottare quali assiomi, sono i seguenti (1).

---

mile Dissertazione del signor Smeaton, la quale s' intitola *Esame sperimentale intorno alle forze naturali dell' acqua, e del vento nel muovere in giro i mulini, ed altre simili macchine.*

(1) *Nouvelles Experiences sur la resist. des fluid.*

1.° *La resistenza perpendicolare, o diretta di un piano, che cammina con moto a se parallelo in un fluido indefinito, è quanto il peso della colonna dello stesso fluido, che ha per base il dato piano, e per altezza quella, ch' è dovuta alla celerità del di lui moto.*

2.° *La resistenza, che un tal piano soffre in un fluido ristretto in un canale, o di basso fondo, è maggiore di quella, che esso piano in parità di circostanze soffrirebbe dallo stesso fluido indefinito.*

3.° *La resistenza, che fa un fluido ad un piano, il quale vi si muova ora con una velocità ed ora con un' altra, è quasi, in parità di circostanze, come il quadrato della velocità del piano.*

4.° *Le resistenze perpendicolari e dirette, che incontrano piani disuguali al muoversi con velocità uguali entro ad uno stesso fluido, sono quasi proporzionali alle grandezze di essi piani.*

5.° *Le resistenze provenienti da' moti obbliqui sono come i quadrati de' seni degli angoli d' incidenze, quando le altre cose vadano del pari, ed essi angoli d' incidenze non sieno minori di 50°.*

6.° *La tenacità dell' acqua può riguardarsi come una forza infinitesima rispetto alla resistenza, che dall' inerzia di esso fluido ne proviene. Ed è anche picciolissimo lo sfregamento dell' acqua lungo le pareti di quel solido, che vi nuota.*

§. 131. *Esempio.* Eccovi un esempio, che ne rischiara le precedenti teoriche. Un piano immobile p, la cui superficie sia un palmo qua-

drato, riceva l' urto diretto da una corrente d' acqua indefinita. La velocità di quest' acqua sia di 3 palmi, cioè questa ne fluisca per 3 palmi in un secondo. Sarà la velocità 3 dovuta all' altezza $\frac{25}{208}$ palmi. Imperocchè ponendo uguale ad a una tale altezza, e sostituendo palmi 18,72 in luogo degli equivalenti piedi parigini 15,1; sarà (§. 148. Mecc.) $3 = 2 \sqrt{(18^{pal.},72.a)}$; e quindi $a = \frac{25}{208}$. Con che essendo l' urto, che riceve dall' acqua il piano p, uguale al peso dell' acqua contenuta nel volume ap (§. 130 n.° 1.°); sarà un tale urto uguale al peso di $\frac{25}{208}$ palmi cubici di acqua, il quale a un di presso ascende a rot. 2, 5 napoletane. Imperciocchè ogni palmo cubico di acqua pesa rot. 20, 736.

Che se l' acqua incorrente nel piano p sia ristretta in un canale, e non indefinita; il di lei urto sarà quasi duplo di tal peso (§. 30 n.° 2.°), o quasi uguale a rot. 5.

CAP. IX.

DELLE PRINCIPALI MACCHINE IDRAULICHE.

§. 132. *Def. XVI.* Ogni strumento, con cui premendo l' acqua stagnante o agitandola, si obbliga una di lei parte a sublimarsi dal proprio livello per iscaricarsi in un' eminente serbatojo, dicesi *Macchina Idraulica*.

§. 133. *Cor.* Adunque non debbono riguardarsi come macchine idrauliche gli *altaleni*,

le *semplici secchie*, e *le secchie a rosario*, *o a ruota*, *che bindoli* dagl' Italiani sogliono chiamarsi.

§. 134. *Scol. I.* La forza, che sospinge l' acqua nelle macchine idrauliche, o vi agisce per pressione, o per urto. Dunque è ragionevole il classificarle in *macchine agenti per pressione*, ed in *macchine agenti per urto*: e denominarne le diverse specie di quelle e di queste dai nomi delle potenze prementi e delle impellenti, che impiegansi a tal uopo.

§. 135. *Scol. II.* Per chiarirvi ciò, che astrattamente vi ho quì recato riguardo alle prime macchine, immaginatevi essere (fig. 78.) ABCE un pozzo, la cui bocca AB abbia un coverchio di legno sì ben combaciante colle sue pareti, che deprimendosi esso coverchio con moto a se parallelo a guisa di stantuffo, nè l' acqua, nè l' aria possa trapelarne. Di più concepite, che pongasi sul coverchio AB un gran peso, come P, o che quivi ne prema una gagliarda molla, o che ne agisca l' aria condensata, o i vapori ristretti nello spazio ALB, e che in C si apra un foro, o vi si applichi un condotto; non dovrà l' acqua zampillarne pel foro C, o elevarsi in tal condotto? E quindi infinite macchine idrauliche potrebbonsi escogitare per le diverse potenze prementi, che vi s' impiegano, e pel diverso modo d' agirvi. La qual cosa potrà eziandio intendersi per le altre macchine idrauliche agenti per urto.

§. 136. *Scol. III.* In questo Capitolo mi ristringo a ragionarvi delle *Trombe idrauliche*, e della *Chiocciola d' Archimede*: le prime delle quali appartengonsi alle macchine idrauli-

che prementi, e l' altra è una macchina idraulica agente per urto, al qual genere appartiensi anche la *Pomba a corda di* M. Verà.

Delle Trombe Idrauliche.

§. 137. *Def. XVII.* Un sistema di tubi verticali, entro a cui sospignesi una parte di un'acqua stagnante per la pressione dell' aria esterna, o di qualche loro stantuffo, che vi si dimena, o per la pressione di quella e di questo, dicesi *Tromba idraulica*, *Macchina tesibiana*, o *Pompa elevatoria.*

§. 138. *Cor.* Dal triplice modo, onde premesi l' acqua salente nelle trombe idrauliche si sogliono queste dividere in *Trombe Aspiranti*, in *Prementi*, ed in *Aspiranto-Prementi*, che diconsi *composte.*

§. 139. *Def. XVIII.* La Tromba aspirante è formata dal tubo (fig. 79.) verticale HN immobile e saldo nelle sue pareti, entro al quale giuoca lo stantuffo *mn* guernito della valvola *v* a cerniera, che apresi all'insù. In mezzo al suo fondo evvi saldato il tubolino verticale *Cf*, il di cui forame inferiore CD mergesi nell'acqua stagnante, e 'l superiore, che comunica col tubo HN, n' è chiuso dalla valvola O, che apresi di sotto in sopra.

§. 140. *Def. XIX.* Il primo di questi tubi, cioè il tubo HN, dicesi *Corpo della Tromba*: il sottoposto tubo *Cf*, che pesca nell' acqua, si chiama *Tubo d'Aspirazione.* E lo spazio KHIL dicesi *parte inferiore della tromba.*

§. 141. *Def. XX.* La *Tromba premente* non è che la tromba aspirante capovolta. Cioè

il corpo della tromba col suo stantuffo è nell' acqua: il tubolino, che dicesi *tubo ascendente*, l' è al di sopra: e le valvole, che vi si contengono apronsi di sotto in sopra.

§. 142. *Def. XXI.* Se al corpo della tromba, il di cui stantuffo non abbia la sua valvola siane saldato il tubo comunicante VPQ, ben lungo, ed avente la sua valvola V, che aprasi dentro ad esso; questa macchina dirassi *tromba composta*: e'l tubo VPQ *acquidotto, condotto*, o *cannone di condotto.*

§. 143. *Scol.* Le trombe aspiranti sogliono adoperarsi per cavar le acque da' pozzi, o da altri luoghi alquanto profondi, per condurle ad una picciola altezza sulla terra. Colle prementi sospingonsi le acque da' luoghi poco profondi ad altezze molto eminenti, come da una fontana ad una torre. E le composte servono a cavar le acque da' luoghi assai profondi, ed a menarle per condotti in altissimi serbatoii.

§. 144. *Scol. II.* Ma prima che passi altrove, non vò tacervi un principio euristico per gli effetti delle prime macchine, ch' è il seguente. *Se la forza* F, *qualunque ella ne sia, premendo un piano* p *ne obblighi un'acqua stagnante a zampillare, o ad estollersi in un condotto: e sia* F *di tante libbre, quante contengonsi nel volume* V *di quest'acqua; sarà la forza* F *equivalente al peso del prisma di acqua, che ha per base* p *e per altezza* V:p; *e perciò l' altezza, alla quale l' acqua n' è determinata a salire, sarà uguale a* V:p:

PROP. XXII. PROBL.

§. 145. *Date le dimensioni della tromba aspirante* MHeCD*f*IN ; *esporre il modo e la quantità dell' acqua, che in ciascuna delle prime agitazioni dell' embolo elevasi nel tubo di aspirazione.*

Sol. I. Sia KN quella parte del corpo della tromba, ove ne trascorre lo stantuffo colle vicendevoli sue elevazioni e depressioni: ed HL la di lei parte inferiore. Sarà chiaro, che elevandosi lo stantuffo dal sito KL in MN, l' aria rinchiusa in HL debba espandersi in HN, e rendersi men densa, ed elastica di quell'altra, che è nel tubo di aspirazione *e*CD*f*. Dunque l' aria di questo tubo per la sua elasticità prevalente dovrà aprirne la valvola O, e diffondersi in HN, e mescendosi coll' aria dello spazio HN, dovrà formarne un' altra aria più densa di quella, che era in HN, ma men densa ed elastica dell' aria esterna. E quindi l' acqua stagnante, ov' è immerso il tubo di aspirazione, dovrà sospingersi entro di esso fino all' altezza CE tale, che la pressione dell'acqua contenuta in CF, e l' elasticità dell' aria compresa in EeHMNI*f*F si equilibrino coll' elasticità dell' aria esterna.

II. Che se lo stantuffo da MN si deprima in KL, dovrà chiudersi la valvola O, ed aprirsi l' altra *v*, per la quale sarà espulsa quell'aria, che contenevasi nello spazio MKLN. E di bel nuovo elevandosi l' embolo in MN renderassi vie più rara l' aria, che trovasi in questa tromba, e più elevata l' acqua nel tubo di aspirazione: come dall' antecedente discorso potrete intenderlo chiaramente.

III. Nella prima agitazione dell' embolo l' aria ristretta nel volume $Cf+HL$ dilatasi nell' altro $Ef+HN$. Nella seconda agitazione dello stesso embolo l' aria rinchiusa nel volume $Ef+HL$ si spande nel volume $E'f+HN$. Nella terza ec. Intanto per brevità d' espressione distinguerò con diversi nomi que' due volumi, che in ogni agitazione dell' embolo sono occupati da una stessa massa d' aria, chiamando il primo *volume ristretto*, e l' altro *volume espanso*. Ed esprimendo per v e V cotesti volumi, e per p e P le forze, che vi ritengono l' aria in quel volume ed in questo, sarà $pv=PV$ (§. 72.).

Premesse queste dilucidazioni sul modo, e la ragione, onde nelle trombe aspiranti si eleva l' acqua, eccone il calcolo della quantità dell'acqua aspirata.

IV. Le basi HI, e CD del corpo della tromba e del tubo di aspirazione dicansi rispettivamente B e b: e sieno $HM=A$, $HK=\alpha$, $Ce=a$. In oltre le CE, CE', CE'', ec., che sono le rispettive altezze, ove nel tubo di aspirazione trovasi l' acqua dopo la prima agitazione dell' embolo, dopo la seconda, dopo la terza, ec., dicansi x, x', x'', ec. Saranno le rette eE, eE', eE'', ec., uguali ad $a-x$, $a-x'$, $a-x''$, ec., rispettivamente: e le ampiezze de' cilindri HN, HL, Cf, Ef, $E'f$, $E''f$, saranno rispettivamente uguali ad AB, αB, ab, $ab-bx$, $ab-bx'$, $ab-bx''$, ec.

Di più sarà $HN+Ef=AB+ab-bx$, $HN+E'f=AB+ab-bx'$, $HN+E''f=AB+ab-bx''$, ec.

E sarà pure $HL+Ef=\alpha B+ab-bx$, ed $HL+E'f=\alpha B+ab-bx'$, ec.

V. Finalmente pongasi uguale ad 1 la densità dell' acqua, che all' altezza p equilibrasi coll' aria naturale, cioè con quell' aria, che nella prima agitazione dell' embolo n' è ristretta entro a' tubi HL, Cf; sarà bp il peso di questa colonna d' acqua. Ed espandendosi quest'aria nel volume HN+Ef, quando lo stantuffo si è sollevato in MN; sarà bx il peso dell'acqua salita nel tubo Cf; e quindi $bp-bx$ il peso dell' acqua, che tien l'aria dilatata in questo volume HL+Ef. Similmente nella seconda agitazione dell' embolo l' aria ristretta nel volume HL+Ef, n' è ritenuta dal peso $bp-bx$. E nello stato d' espansione, cioè quando ne occupa lo spazio HN+Ef' vi si ritiene dal peso $bp-bx'$. E così in appresso. Dunque in virtù di quel, che si è detto nel n.° III. della soluzione di questo problema, si avranno le seguenti equazioni quadratiche,

I. $(bp-bx')(AB+ab-bx)=bp\,(\alpha B+ab)$

II. $(bp-bx')(AB+ab-bx')=(bp-bx)$
$(\alpha B+ab-bx)$

III. $(bp-bx'')(AB+ab-bx'')=(bp-bx')$
$(\alpha B+ab-bx')$ ec.

le quali dovranno maneggiarsi nel seguente modo: cioè il valore dell' x determinato dalla equazione prima si surroghi nella seconda, per determinarvi x': e 'l valore dell' x' di questa equazione si sostituisca nella terza per averne il valore di x'', ec.

VI. Ma per agevolar questi calcoli, suppongasi la base B del corpo della tromba essere uguale ad nb, e facciasi $a+n$A$=$H, ed $a+n_\alpha=h$; sarà AB$+ab=n$A$b+ab=b$H, ed αB$+ab$

$=bh$. Onde sostituendo questi valori nelle rapportate equazioni, e dividendole per bb, sarà

I. $(p-x)(H-x)=ph$,

II. $(p-x')(H-x')=(p-x)(h-x)$,

III. $(p-x'')(H-x'')=(p-x')(h-x')$,

IV. ec.

§. 146. *Esempio*. Suppongasi, che la base del corpo della tromba sia quadrupla di quella del tubo di aspirazione, e che sia $A=2^{pie.}$, $a=25^{pie.}$, $\alpha=0$. Sarà $n=4$, $H=25+4.2=33^{pie.}$, ed $h=25^{pie.}$. E ponendo $p=32^{pie.}$; si avrà per la prima equazione $(32-x)(33-x)=32.25=800$; cioè $x=\frac{65}{2}-\sqrt{800}=4,2$. Vale a dire *al primo colpo dell' embolo l' acqua salirà nel tubo di aspirazione a piedi 4, 2 in circa.*

Or se nella seconda equazione si sostituisca in luogo di x il suo valore 4, 2, sarà $(p-x)(h-x)=(32-4,2)(25-4,2)=578$ a un di presso. Laonde risolvendo la seconda equazione, che diventa $(32-x')(33-x')=578$, sarà $x'=\frac{65}{2}-\sqrt{578}=8,5$. Cioè dopo il secondo colpo dell' embolo si troverà l' acqua essere montata nel tubo di aspirazione all' altezza di piedi 8, 5 in circa.

§. 147. *Cor. I.* Dalle verità, che ho sparse nella dimostrazione di questo Problema, rileverete, che l' acqua non può mai ascendere nel tubo di aspirazione a maggiore altezza di 32 piedi. Onde per riuscire utile questa macchina, l' altezza del tubo di aspirazione, e della parte inferiore della tromba dev' essere sempre minore di 32 piedi in circa.

§. 148. *Cor. II.* Dopo alquanti colpi dell' embolo, l' acqua aspirata n' empirà la parte inferiore della tromba. Laonde chiamando B la base dell' embolo, e π l' aggregato delle altezze del tubo di aspirazione e della parte inferiore della tromba; sarà $pB - \pi B$ la forza dell'acqua, che sospigne l' embolo, quand' ei ritirasi all'insù.

PROP. XXIII. PROBL.

§. 149. *Esporre il modo e la forza, onde sospignesi l' acqua in una tromba composta.*

Sol. Immaginatevi, che dopo alquanti colpi dell' embolo l' acqua aspirata per lo tubo *Cf* n' abbia empita la KI parte inferiore della tromba. Sarà chiaro, che sublimandosi lo stantuffo da KL in MN, debbasi fare un voto d' aria in MKLN, e che per la prevalente pressione dell' aria esterna debbasi altr' acqua sospignere nel tubo di aspirazione, la quale aprendo la valvola O n' empirà lo spazio MKLN. Ma quando l' embolo si deprime da MN in KL, chiudesi la valvola O verticale, e si apre la laterale V del tubo VPQ, che vi darà l' ingresso all'acqua rinchiusa nello spazio MKLN. E di nuovo elevandosi lo stantuffo da KL in MN, si chiuderà la valvola laterale, a cagione dell' acqua contenuta in VPQ, che la preme; e si aprirà la verticale O, per cui n' entrerà tant' acqua, che potrà occuparne lo spazio MKLN. E questa nella depressione dell' embolo entrerà nel tubo VPQ, spignendone più sù quell' altra, che vi si conteneva. E così in appresso.

Ciò posto. Intendasi ripieno d' acqua il tubo VPQ, e che ella si versi per lo scaricatojo Q:

e sia Φ la forza, che si applichi alla verga o alla catena dello stantuffo per elevarlo da KL in MN: φ quell' altra forza, che ci vuole a deprimerlo da MN in KL, e P il peso dell'intiero stantuffo, computatavi la di lui frizione. Di più sia $Ce+KH=\pi$, e $PQ=\Pi$. Sarà $pB-\pi B$ la forza elevatrice dello stantuffo recatagli dall' acqua aspirata nella tromba (§. 148.). Ma tanto la forza Φ applicata allo stantuffo, che questa forza elevatrice cagionatagli dall' acqua debbono bilanciare il peso del medesimo stantuffo, e la colonna d' aria, che il grava. Dunque sarà $\Phi+pB-\pi B=P+pB$: e quindi $\Phi=P+\pi B$.

Ma quando l' embolo deprimesi da MN in KL, si chiude la valvola O, e si apre l' altra V; onde rendendosi comunicanti i due tubi HN e VPQ, lo stesso embolo n' è sospinto colla forza ΠB. Dunque questa forza elevatrice dello stantuffo dovrà pareggiare il di lui peso P, e la forza φ, che lo deprime: cioè sarà $\varphi+P=\Pi B$, e quindi $\varphi=\Pi B-P$; e finalmente $\Phi+\varphi=\pi B+\Pi B=B(\pi+\Pi)$. C. B. F.

§. 150. *Reg. I. La somma delle forze* Φ *e* φ, *cioè lo sforzo totale, che dee far l' agente per dimenar l' embolo nella tromba composta, è quanto il peso della colonna d' acqua, che ha per base la base dell' embolo, e per altezza la distanza dello scaricatojo dal livello dell' acqua stagnante.*

§. 151. *Reg. II. E sarà uniforme la depressione e l' elevazione dello stantuffo, se il di lui peso* P *pareggi quello di una colonna d' acqua, che ha per base la base dell' embolo, e per altezza la semidifferenza*

delle distanze della valvola laterale dal livello dell' acqua stagnante, e dallo scaricatojo.

Imperocchè un pregio di questa macchina consiste nell' uniforme depressione, ed elevazione dell' embolo (§.423.Mecc.). Dunque dovrà essere $\Phi=\varphi$, cioè pareggiando i loro valori, $P+\pi B=\Pi B-P$; e quindi $P=\frac{\Pi B-\pi B}{2}$.

§. 152. *Scol.* Quant' è più amplo il corpo della tromba, e più alto lo scaricatojo, tant' esser dee più poderosa la potenza di questa macchina. In fatti se la base della tromba, o dell' embolo suppongasi uguale a mezzo palmo quadrato, e che l' acqua si debba elevare a 100 palmi; sarà $\Phi+\varphi=\frac{100}{2}$ palmi cubici, il di cui peso ascende a più di 1000 rotola napoletane. A tal uopo è stata inventata la pompa a fuoco, la quale non è che la tromba composta esibita nella fig. 79., ove al di lei embolo *v* n'è applicato per mezzo della leva Ww il pesantissimo contrappeso Y adattato a guisa di stantuffo nell' immobile cassa cilindrica ZX, il quale n' è sospinto da' vapori dell' acqua bollente della caldaja RTS ben chiusa: ed al rapprendersi di questi (lo che addiviene per l' immediata *injezione* fattavi di uno spruzzo d' acqua fredda) ei si deprime pel proprio peso: onde a vicenda si deprime, e si eleva l' embolo della Tromba HN.

Della Coclea d'Archimede.

§. 153. *Def. XXII.* La *Coclea d' Archimede*, o *la Vite Idraulica*, è un cilindro di

legno (fig. 81.) ACDQ, nella cui parte convessa v' è circondotto il tubo DOKvkA spiralo-cilindrico, di metallo, che ha i suoi fori D ed A rasente le di lei basi. Il foro D dicesi *principio della spira* DOKvkA, e 'l lato cilindrico condotto pel punto D può dirsi *lato principale della Coclea*, il quale intersega il tubo spirale in tanti punti, quanti sono i di lui giri. E si dirà *primo giro*, o *prima elice* del tubo quella di lui parte, che è tra 'l principio della spira e la prima di lei sezione col lato principale della Vite. Quell' altra parte del tubo spirale, che framezza la prima, e la seconda intersezione della spira col lato principale, si dirà *secondo giro* dello stesso tubo. E si dirà *terzo giro* ec.

§. 154. Nell' adoperar questa Chiocciola, una certa parte della sua base CRDM, ed in un certo modo dee mergersi nell' acqua stagnante BX: ed aggirandone tal macchina intorno al proprio asse, e contro l' acqua, questo fluido andrà scorrendo per quel tubo spirale, finchè si verserà fuori della bocca A. Or questo ascenso dell' acqua nel tubo spirale non è un rapimento, che le si cagiona dalla rivoluzione della Chiocciola, ma un continuo discendere, che vi fa l'acqua per que' picciolissimi piani obbliqui, de' quali può intendersi formato esso tubo. Onde diremo col Galilei essere mirabile cotesta macchina, come quella in che l' acqua ne ascende sempre discendendo. In fatti conducasi Dr parallela a CP, e suppongasi essere l' angolo ODM, che fa la spira colla sua base, minore dell' angolo NCP, che è l' obbliquità di cotesta base; sarà lo stesso angolo ODM minore di rDM. Dunque il primo

elemento DO della spira giacerà sotto alla retta orizzontale D*r*, e sarà un picciolo piano inclinato. E quindi ponendo nel forame D del tubo spiralo-cilindrico DOK*v* il globettino D; questo ne dovrà discendere per DO come per un piano inclinato. E rivolgendo essa vite intorno al proprio asse, sicchè il punto O salga in D; un tal corpicciulo scenderà in simil guisa per l'archetto O*f*: e così in appresso. Dunque questo globettino ne avrà percorsi gli archetti DO, O*f*, ec. sempre discendendo: sebbene alla fine di ciascuno di essi siasi trovato più sù, che nel principio.

§. 155. Or in ognuna di coteste rivoluzioni, che fa la vite idraulica intorno al suo asse, il forame inferiore del tubo spirale è alternativamente nell' acqua, e nell' aria. Quando tal foro emerge dall' acqua vi si riempie di questo liquido una certa parte del tubo spirale, che dicesi *Idroforo*: ed ei montando in D, l' acqua di già entrata nell' idroforo rinculerà verso il lato AC della vite, e ne occuperà altre parti del tubo spirale, che succedonsi a quell' idroforo. Sicchè compiendosi tante rivoluzioni nella Coclea, quanti giri ne ha il suo tubo spirale, si verserà per la bocca di questo tubo quell' acqua, che vi si era intrusa nella prima rivoluzione della vite. E così della seconda rivoluzione, ec.

§. 156. Dunque 1° *l' orificio inferiore della coclea d' Archimede, ch' è in moto, è alternativamente nell' acqua e nell' aria.* 2° *Lo getto, che fassi per l' orificio superiore, è interrotto.* 3° *Gli estremi dell' acqua, che trovasi in ciascuno de' diversi giri del tubo spirale, son sempre a livello.* 4° *La base di cotesta coclea*

dee essere in un certo modo inclinata all' orizzonte, *ed in parte mersa nell' acqua*; come or ora vi dichiaro.

§. 157. Quantunque la Chiocciola d'Archimede sia la più semplice, e la più antica delle macchine idrauliche; pure i problemi, che vi si propongono, sono cotanto malagevoli, che alcuni di essi eccedono ogni nostr'arte. Gli Antichi Geometri occuparonsi solamente a descriverla, e costruirla. Tra' moderni il gran Galilei dichiarò con ragioni geometriche *l' ascensione*, *che vi faceva l' acqua*: e 'l sagacissimo Daniele Bernoulli applicandovi l' Analisi sublime ha saputo definirne il *di lei sito più vantaggioso nell' acqua*: *la quantità di questo liquido*, *che vi si versa in ogni rivoluzione di essa*, *e la potenza*, *che ne abbisogna a rivolgerla.* Ma nel moto di questa Macchina distinguonsi varie grandezze meccaniche: e sono *la forza giratoria del cilindro*, *la velocità dell' acque*, *che ascende nel tubo spirale*, *la di lei promozione in alto*, *le varie forze sollecitatrici delle particelle dell' acqua*, *la vicendevole compressione di tali particelle tra loro*, *e colle pareti del tubo*, ed altre simiglianti cose, che variamente modificate, e combinate formano tanti dati, onde risolvere altrettanti Problemi Idraulici. E quindi saggiamente il sommo Eulero colla risoluzione di questi ne ha formata un' elegante Dissertazione inserita nel *Vol. V. Nov. Comm. Acc. Petropol.*

PROP. XXIV. PROBL.

* §. 158. *Esporre i principii, onde può calcolarsi il più vantaggioso sito della Coclea d' Archimede nell' acqua stagnante: e la quantità di questo liquido, che in ogni rivoluzione della macchina intrudesi nel tubo spirale.*

Sol. Sia (fig. 80.) R il principio della spira merso nell' acqua stagnante: le rette RF, RO sieno le rispettive tangenti menate al cerchio ed alla spira nel punto R, ed RH sia una produzione del lato del cilindro, che appartiensi al punto R. Dovran giacere in uno stesso piano le tre rette RF, RO, RH, com' è chiaro dalla genesi della spira cilindrica (Def. III. Pren.). E quindi prodotte le rette RF, RH finchè incontrino uno stesso piano orizzontale in F ed H, e congiunta la FH, dovranno le rette FH, ed RO essere in uno stesso piano: e saranno tra se parallele, se l' angolo RFH pareggi FRO. Dal punto N si elevi la NP perpendicolare al cerchio CRD: ed ella si protragga, finchè incontri in P il detto piano orizzontale; saranno le due rette RH, ed NP perpendicolari allo stesso piano MCR, e quindi tra se parallele: e saran pure uguali; poichè arrestansi tra quel piano orizzontale, e la retta NR, che gli è parallela (Pren. X num. II.).

Si congiunga la retta FP. Saranno i due triangoli FRH, FNP rettangoli in R ed N, ed avranno uguali i cateti RH, NP. E sarà poi l' angolo RFH, che si è supposto pareggiarne FRO uguale a σ (Pren. X), e l' angolo NFP, ch' è l' inclinazione della base della chiocciola all' orizzonte, sarà uguale ad ω (Pren. X).

Ciò posto. Sta FR : RH::Rag.: tang. σ, ed è pure NP : NF :: tang. ω : Rag. Dunque sarà per *uguaglianza perturbata* FR:FN::tang.ω: tang.σ. Ma è poi (8. El. VI.) FR:FN come RG, ch'è uguale ad 1, ad NR. Dunque sarà 1:NR::tang. ω : tang.σ. E quindi $RN = \frac{\text{tang.}\sigma}{\text{tang.}\omega}$; $MR = \frac{2\text{tang.}\sigma}{\text{tang.}\omega}$, e finalmente $GN = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\text{tang.}^2\sigma}{\text{tang.}^2\omega}\right)}$. E quindi essendo FH parallela ad RO, dovrà essere la $MR = \frac{2\text{tang.}\sigma}{\text{tang.}\omega}$. Ma quando la retta RO è parallela ad FH, e con ciò orizzontale, non può l'acqua introdursi nel tubo spirale, e tal coclea ne resta senza effetto. Dunque dovendosi evitare una tal posizione: converrà serbarvi le seguenti regole.

* §. 159. *Reg.* I. *Se la base della Chiocciola dividasi in due segmenti disuguali, la cui comun sottesa sia* $\frac{2\text{tang.}\sigma}{\text{tang.}\omega}$, *e'l segmento maggiore si chiami* S, *ed* s *il minore; non dovrà mergersi nell' acqua un segmento della base maggiore di* S, *nè minore di* s.

* §. 160. *Reg.* II. *L' obbliquità della base della Chiocciola non può essere minore dell' acutezza della spira, cioè non può essere l' angolo* ω *minore di* σ.

Imperocchè in tal caso sarebbe $\frac{\text{tang.}^2\sigma}{\text{tang.}^2\omega}$ maggiore di 1; e quindi immaginaria la grandezza $\sqrt{\left(1 - \frac{\text{tang.}^2\sigma}{\text{tang.}^2\omega}\right)}$. Lo che è un assurdo.

* §. 161. *Reg.* III. *La quantità dell' acqua, che in ogni rivoluzione della chiocciola ascende nel tubo spirale, è tanto maggiore, quanto n' è più acuto l' angolo della spira colla base della chiocciola, e quanto n' è maggiore l' inclinazione di essa base all' orizzonte; cioè quanto è più piccolo l' angolo σ, e più grande l' altro ω.*

L' angolo ω dee sempre essere maggiore di σ (§. 160.) Dunque se l' angolo σ sia picciolissimo, ed ω lo superi per poco (lo che non basta); sarà pure ω un angolo assai acuto, e la chiocciola starà quasi in sito verticale. E quindi il getto d' acqua, che farassi per la bocca della chiocciola, sarà più alto, e riuscirà più comoda quell' azione, onde tal macchina deesi aggirare. Ma al minorarsi dell' angolo ω, si fa minore l' idroforo del tubo spirale, e meno d' acqua si versa per la bocca della chiocciola. Dunque dovrebbesi definire un tal rapporto dell' angolo σ all' altro ω; sicchè l' acqua n' escisse per la bocca della chiocciola nella massima quantità, nella massima altezza, e colla più comoda azione. Ma un tal Problema è difficilissimo a risolversi, ed in pratica può convenevolmente farsi l' angolo σ di 5°, e l' angolo ω di 60°, com' è sembrato al sagacissimo Daniele Bernoulli.

FINE.

INDICE

INSTITUZIONI DI MECCANICA

INSTITUZIONI DI IDROMECCANICA

PRESIDENZA DELLA GIUNTA DI PUBBLICA ISTRUZIONE

Vista la dimanda del Tipografo Pasquale Ravallese, con che chiede di stampare l' opera del Professore Sig. D. Gabriele Fergola, intitolata: *Instituzioni di Meccanica e d' Idromeccanica.*

Visto il favorevole parere del Regio Revisore signor D. Antonio d' Aprea,

Si permette che la suindicata opera si stampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà, se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto uniforme la impressione all' originale approvato.

Il Consultore Presidente

A. SELEUCIA

Il Segretario Generale e Membro della Giunta

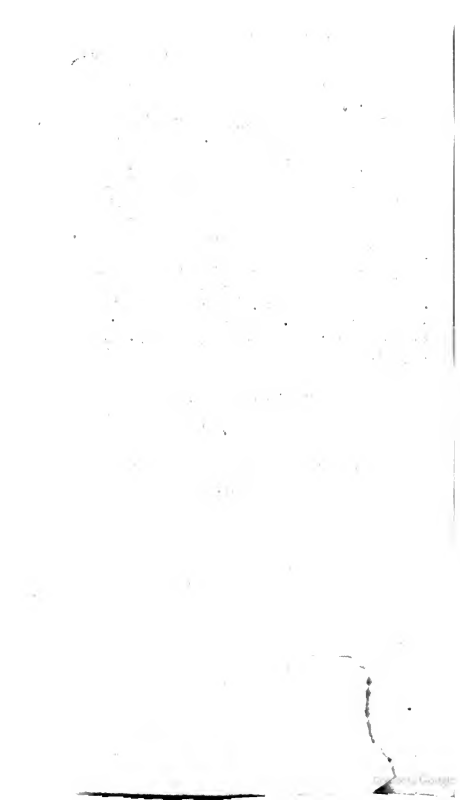
Gaspare Selvaggi.

Pag.	verso	Errori	Correzioni
26	7	$\frac{dS}{dt}$	$\frac{dS}{dT}$
43	27	uei	nei
48	28	$f, f, f,$	$f, f', f'',$
51	12	PQ	BQ
57	27	nP	np
81	11	quantità motrice	quantità acceleratrice
83	19	$EF^2 CB^2$	$EF^2 : CB^2$
84	2	$S = V$	$S = \frac{V^2}{F}$
105	29	F	P
120	12	§. 245.	* §. 245.
128	2	§. 256.	* §. 256.
157	17	ACB	ACR
212	3	a dy	ad y
272	19	(*fig.* 69.)	(*fig.* 70.)
280	12	QP delle	QT delle

fig.
N
X
Y
Q
t
K
O
f
r
M
G
C